EXAMEN DU BACCALAUREAT

BACCALAUREAT DE L'ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION NORMALE 2023

SERIE D

BURKINA FASO

Unité –Progrès – Justice

2nd ***tour***

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Calculatrice non autorisée)

Coefficient : 5

Durée : 4 heures

EXERCICE N°1 (4 points)

On considère le nombre complexe a défini par $a = \frac{3-i}{2+i} + \frac{2+i}{i} - 3(1-2i)^2 - 2(2+i)(3+i)$.

1) Ecrire a sous la forme algébrique. (0,5 pt)
2) Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, le système d'inconnues z et z' $\begin{cases} z + iz' = 1 + i \\ \frac{1}{2}z + (1-i)z' = 2 - 5i \end{cases}$. (0,75 pt)
3) Le plan complexe P étant muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On a les points A et B d'affixes respectives $z_A = -2i$ et $z_B = 3 - i$. On considère l'application f de P privé de A dans P qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-3+i}{-iz+2}$
   a) Soit C le point d'affixe $1 - i$.
      Calculer l'affixe de f(C). (0,5 pt)
   b) Montrer que $z' = \frac{i(z-3+i)}{z+2i}$. (0,25 pt)
   c) Interpréter géométriquement le module et l'argument de z'. (0,75 pt)
   d) En déduire :
      - l'ensemble E_1 des points M tel que $z' \in \mathbb{R}^*$. (0,5 pt)
      - l'ensemble E_2 des points M tel que $z' \in i\mathbb{R}^*$. (0,5 pt)
      - l'ensemble E_3 des points M tel que $|z'| = 1$. (0,5 pt)

EXERCICE N°2 (4 points)

Un sac contient 6 boules noires, 3 boules vertes et une boule rouge indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 2 boules.

1) Calculer la probabilité de tirer 2 boules de même couleur. (0,5 pt)
2) Calculer la probabilité de tirer au moins une boule verte. (0,5 pt)
3) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 2 boules, associe (+2) si les 2 boules sont de même couleur et (-2) si les 2 boules sont de couleurs différentes.
   Déterminer la loi de probabilité de X. (0,75 pt)
4) On recommence 3 fois la même épreuve, en notant à chaque fois la valeur X obtenue et en remettant les 2 boules dans le sac après chaque tirage.
   Soit Y la variable aléatoire égale à la somme des 3 valeurs obtenues par X.
   a) Déterminer la loi de probabilité de Y. (1,25 pts)
   b) Calculer l'espérance mathématique de Y. (0,5 pt)
   c) Déterminer la fonction de répartition de Y. (0,5 pt)

PROBLEME (12 points)

Partie A (2 points)

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E): y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$

1) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^{2x} + b$ soit une solution de (E).
2) On pose $h = z + g$. Montrer que h est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle $(E') : y' - 2y = 0$. (0,5 pt)
3) Résoudre l'équation différentielle (E') et en déduire les solutions de (E). (0,5 pt)
4) Déterminer la solution k de (E) s'annulant en 0. (0,5 pt)

Partie B (4,5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan d'unité graphique 2cm.

1) a) Calculer la limite de f en $-\infty$. En déduire que la courbe représentative (C) de f admet une asymptote (D) dont on précisera l'équation. (0,5 pt)
   b) Etudier les positions relatives de (C) et (D) et préciser les coordonnées du point A, intersection de (C) et (D). (0,5 pt)
2) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat obtenu. (0,75 pt)
3) a) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. (1,25 pt)
   b) En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$. (0,25 pt)
4) Tracer (D) et (C).

Partie C (4 points)

1) a) Calculer en utilisant une intégration par parties $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - f(x))\, dx$. (1 pt)
   b) Donner une interprétation géométrique de I. (0,5 pt)
2) Calculer $J = \int_{-1}^{0} (2x - 1)\, e^{2x} dx$. (0,5 pt)
3) A l'aide d'une double intégration par parties, calculer $K = \int_{-1}^{0} (2x - 1)^2 e^{4x} dx$. (1 pt)
4) Soit Δ le domaine des points du plan tels que $-1 \leq x \leq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
   a) Exprimer en fonction de J et K le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de Δ autour de l'axe des abscisses. (0,5 pt)
   b) Calculer en cm³ le volume V. (0,5 pt)

Partie D (1,5 points)

On considère dans le même repère que (C) la courbe (Γ) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\ln t}{2} \\ y(t) = 1 - \frac{1 + \ln t}{t} \end{cases} \quad , t \geq 1$$

1) Déterminer une équation cartésienne de (Γ). (0,75 pt)
2) Expliquer la construction de (Γ) à partir de (C) puis construire (Γ) en pointillés. (0,75 pt)

On donne : $\ln 2 \approx 0{,}69$.