BACCALAUREAT | **Coefficient : 5**
SESSION 2024 | **Durée :4H**

MATHEMATIQUES

SERIE E

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1sur3 ; 2 sur3 et 3sur3.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé
Le candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.

EXERCICE 1

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres :

$a_n = 4\times10^n - 1$; $b_n = 2\times10^n - 1$; $c_n = 2\times10^n + 1$.

1. a) Calculer les nombres a_3, b_3 et c_3.
   b) Démontrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.
   c) Démontrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 50, que b_3 est premier.
   d) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.
   En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.
   e) Démontrer que $\text{pgcd}(c_n, b_n) = \text{pgcd}(b_n, 2)$. En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.
2. On considère l'équation (1) : $b_3 x + c_3 y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.
   a) Justifier que l'équation (1) possède au moins une solution.
   b) En appliquant l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3, déterminer une solution particulière de l'équation (1).
   c) Résoudre l'équation (1).

$c_n = b_n + 2$

EXERCICE 2

Dans le plan orienté dans le sens direct, OBC est un triangle équilatéral direct inscrit dans un cercle (Γ).

Le point A est le symétrique de C par rapport à O.

J et K sont les points de (Γ) diamétralement opposés respectivement à B et C.

Partie A

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure. On prendra OB = 5 cm.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation R définie par
   $R = S_{(OJ)} \circ S_{(OK)}$.
3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
   Déterminer la droite (Δ) telle que $T = S_{(\Delta)} \circ S_{(OJ)}$.

4. Démontrer que T o R est la rotation de centre K et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Partie B

On considère le point E tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BO}$

1. Démontrer que ABE est un triangle équilatéral de centre O.
2. Soit h une isométrie du plan qui transforme A en C et O en B. On pose $g = t_{\overrightarrow{BO}} \circ h$.
   a) Déterminer g(O) et g(A).
   b) En déduire que g est soit la symétrie orthogonale d'axe (OB), soit la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
3. Caractériser les isométries h du plan qui transforment A en C et O en B.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

On note (C_f) la représentation graphique de f, dans un repère orthogonal (O, I, J).

(*Unités graphiques :* 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées).

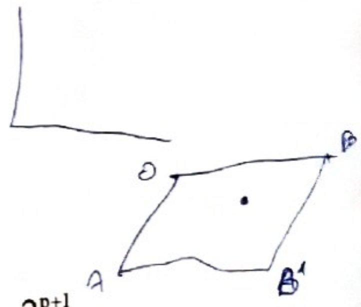
Partie 1

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0.
2. On admet que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on désigne par f' sa dérivée.

   a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif puis établir que $f'(x) = \frac{(2-\ln x)\ln x}{x^2}$.

   b) Déterminer les variations de f.

3. Tracer la courbe (C_f) dans le repère (O, I, J).



4. On pose pour tout entier naturel $p \geq 1$, $I_p = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2} dx$.

   a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_1 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

   b) Démontrer, en utilisant une intégration par parties, que : $\forall$ p≥ 1, $I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p$.

   c) En utilisant les résultats précédents, calculer successivement I_2, I_3 et I_4.
   d) On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de (C_f) d'abscisses comprises entre 1 et e^2. Le point M de (C_f), d'abscisse x, décrit alors un cercle de rayon $f(x)$.
   Justifier que le volume du solide ainsi engendré en unités de volume est $V = \pi I_4 \text{ cm}^3$.

$\frac{\ln x}{x} =$

$\frac{\ln x}{x^2}$ $\int \frac{\ln x}{x}$

Partie 2

Soit **a** un nombre réel strictement positif et A le point de (C_f) d'abscisse **a**.

Soit T_a la tangente à (C_f) au point A.

1. Ecrire une équation de T_a.
2. Déterminer les nombres réels **a** pour lesquels T_a passe par l'origine O du repère.
3. Donner une équation de chacune des tangentes à (C_f), passant par O.

Partie 3

On étudie maintenant l'intersection de (C_f) avec la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{e^2}x$.

1. On pose pour x strictement positif, $\varphi_1(x) = x - e\ln x$.

   Démontrer que φ_1 est strictement décroissante sur$]0 ; e[$ et strictement croissante sur $]e ; +\infty[$.

   En déduire que 0 est le mininum de φ_1 sur $]0 ; +\infty[$.
2. On pose pour x strictement positif, $\varphi_2(x) = x + e\ln x$.
   a) Etudier le sens de variation de φ_2 sur $]0 ; +\infty[$
   b) Justifier que l'équation $\varphi_2(x) = 0$ a une solution unique α telle que $0{,}5 < \alpha < 1$.
3. Déterminer les points d'intersection de (C_f) et de (Δ).