

Proposition de correction de l'épreuve de
Mathématiques session 2025 1^{er} tour BAC E₁ - F₂ - F₃ - F₄.

Exercice N°1

1) On donne: $z_0 = 2+i$ et (E): $z^3 - (3+2i)z^2 + (1+4i)z + 1-2i = 0$.

a) Montrons que z_0 est solution de l'équation.

Vérifions si $z_0^3 - (3+2i)z_0^2 + (1+4i)z_0 + 1-2i = 0$

$$\begin{aligned} z_0^3 - (3+2i)z_0^2 + (1+4i)z_0 + 1-2i &= (2+i)^3 - (3+2i)(2+i)^2 + (1+4i)(2+i) + 1-2i \\ &= 8+12i+6i+1 - (1+18i) + (-2+9i) + 1-2i \\ &= 9+13i - (1+18i) + (-2+9i) + 1-2i \\ &= 9-1-2+1+i(11-18+9-2) \\ &= 7-1-2+1+i(11-18+9-2) \end{aligned}$$

$z_0^3 - (3+2i)z_0^2 + (1+4i)z_0 + 1-2i = 0$ donc z_0 est solution de (E).

b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

z_0 étant solution de (E), on peut écrire:

$$(z - z_0)(az^2 + bz + c) = 0 \quad \text{soit} \quad (z - 2 - i)(az^2 + bz + c) = 0$$

$$az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c - aiz^2 - biz - ic = 0$$

$$az^3 + (b - 2a - ai)z^2 + (c - 2b - ib)z - 2c - ic = 0$$

Par identification, on a: $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a - ai = -3 - 2i \\ c - 2b - ib = 1 + 4i \\ -2c - ic = 1 - 2i \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 - 2i + 2 + i \Rightarrow b = -1 - i \\ c = 1 + 4i - 2 - 2i - i + 1 \Rightarrow c = i \\ -2c - ic = -2(i) - i(i) \Rightarrow -2c - ic = 1 - 2i \quad (\text{Vrai}) \end{cases}$$

$$(z - z_0)(az^2 + bz + c) = 0 \Leftrightarrow (z - 2 - i)(z^2 + (-1 - i)z + i) = 0$$

$$\Delta = (-1 - i)^2 - 4 \times 1 \times i \Rightarrow \Delta = 2i - 4i = -2i = (1 - i)^2$$

$$z_1 = \frac{1+i - 1+i}{2} = i; \quad z_2 = \frac{1+i + 1-i}{2} = 1; \quad z - z_0 = 0 \Rightarrow z = 2+i$$

$$S_C = \{2+i; i; 1\}$$

2-a) On peut comment placer les points dans un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$
unité graphique 2 cm.

b) Calculons: $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{i - 1}{2 + i - 1} = \frac{i - 1}{1 + i} = \frac{-2i}{2} = -i$

$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ sous forme exponentielle donne $z = e^{\frac{-i\pi}{2}}$ avec

$$z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$$

c) Comme $z = -i$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$, alors on a :

$CA = CB$ et $\arg(\vec{CB}; \vec{CA}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$, on conclut que ABC est un triangle isocèle rectangle en C .

d) On donne (6) le cercle circonscrit au triangle ABC .
 * Soit I le centre du cercle: $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ car I milieu de $[AB]$ $\Rightarrow z_I = \frac{i + 2 + i}{2} = 1 + i \Rightarrow z_I = 1 + i$

* Soit r le rayon du cercle. $r = \frac{\text{diamètre}}{2} \Rightarrow r = \frac{AB}{2}$

on $AB = |z_B - z_A| \Rightarrow AB = |2 + i - i| \Rightarrow AB = 2 \Rightarrow r = 1$

Autre méthode $AI = BI = CI = r = 1$.

e) D l'image de A par la translation de vecteur $\vec{CB}$ signifie que $\vec{AD} = \vec{CB} \mapsto z_D - z_A = z_B - z_C \Rightarrow z_D = z_A + z_B - z_C$

$$z_D = i + 2 + i - 1 \Rightarrow z_D = 1 + 2i$$

3°) On donne: (7): $|z - 2 - i| = |(2 + i) - 1|$

a) Montrons que (7) définit un cercle

$$|z - (2 + i)| = |1 + i| \Rightarrow |z - z_A| = \sqrt{2} \Rightarrow AM = \sqrt{2} \text{ d'où}$$

(7) définit un cercle de centre A et de rayon $r = \sqrt{2}$

b) Justifions que $D \in (7)$.

$$|z_D - z_A| = |1 + 2i - 2 - i| = |-1 + i| = \sqrt{2} \text{ d'où } D \in (7)$$

Exercice N°2.

1-a) On peut représenter le "nuage de point"!

1-b) Les coordonnées du point moyen G

$$\text{Soit } G(X; Y) \text{ où } X = \frac{\sum x_i}{7} \text{ et } Y = \frac{\sum y_i}{7}$$

$$X = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = \frac{12+16}{7} = 4$$

$$Y = \frac{100+110+160+165+200+170+215}{7} = \frac{1120}{7} = 160$$

Conclusion: $G(4; 160)$

2-a) Les coordonnées du point moyen G_1

$$\text{Soit } G_1(X_1; Y_1) \text{ où } X_1 = \frac{\sum x_i}{4} \text{ et } Y_1 = \frac{\sum y_i}{4}$$

$$X_1 = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{8}{4} = 3 \text{ et } Y_1 = \frac{100+110+160+165}{4} = 133,75$$

Conclusion: $G_1(3; 133,75)$

2-b) Les coordonnées du point moyen G_2

$$\text{Soit } G_2(X_2; Y_2) \text{ où } X_2 = \frac{\sum x_i}{3} \text{ et } Y_2 = \frac{\sum y_i}{3}$$

$$X_2 = \frac{5+6+7}{3} = \frac{18}{3} = 6 \text{ et } Y_2 = \frac{170+200+215}{3} = 195$$

Conclusion: $G_2(6; 195)$

2-d) Equation cartésienne de la droite $(G_1 G_2)$

$$\text{Soit } (G_1 G_2): y = mx + p \text{ avec } m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

$$m = \frac{195 - 133,75}{6 - 3} \Rightarrow m = 20,42$$

$$y = mx + p \Rightarrow p = Y_2 - m X_2 \Rightarrow p = 195 - 20,42(6) \Rightarrow p = 72,5$$

$$(G_1 G_2): y = 20,42x + 72,5$$

3-a) Nombre de pagnes produits en Décembre 2024.

En Décembre 2024, $x = 12$ alors on a:

$$y = 20,42(12) + 72,5 \Rightarrow y = 317,54$$

Conclusion : En Décembre 2024, le nombre de pagnes produits est 317 pagnes.

3-b) L'entreprise continuera sa production après Décembre 2024 car à cette date la production mensuelle est supérieure à 250.

Problème.

Partie A:

On donne:
$$\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = 1 - 2x + x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Précisons l'ensemble de définition de f .

$$D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} \text{ avec } D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in]-\infty; 0] =]-\infty; 0]$$

$$D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \cap]0; +\infty[=]0; +\infty[$$

$$D_f =]-\infty; 0] \cup]0; +\infty[= \mathbb{R}. \quad \text{Conclusion: } D_f = \mathbb{R}.$$

2-a) Continuité de f en 0.

$$\bullet 0 \in D_f; \bullet f(0) = (0+1)e^{-0} = 1; \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1)e^{-x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - 2x + x \ln x = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\text{Conclusion: Comme } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1 \text{ alors}$$

f est continue en 0.

2-b) Dérivabilité de f en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+1)e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x e^{-x} + e^{-x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} + \frac{e^{-x} - 1}{x}; \text{ Posons } X = -x \text{ et } x = -X; \text{ si } x \rightarrow 0^- \text{ alors } X \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{X \rightarrow 0} e^X + \frac{e^X - 1}{-X} = 0 \text{ car } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2x + x \ln x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 + \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Conclusion: Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ on déduit que f n'est pas dérivable en 0.

- Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$, alors (C) admet une demi-tangente de coefficient directeur 0 à gauche de 0.
- Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$, alors (C) admet une demi-tangente verticale à droite de 0.

3°) • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{-x} = -\infty$ Car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2x + x \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2x \left(1 - \frac{\ln x}{2}\right)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x(-2 + \ln x) = +\infty$ Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

4-a°). Calculons $f'(x)$ sur $] -\infty; 0[$.

$\forall x \in \mathbb{R}^-$, f est dérivable car produit de fonctions dérivables et on note $f'_1(x)$ la dérivée de f sur $] -\infty; 0[$.

$$\begin{aligned} f'_1(x) &= [(x+1)e^{-x}]' = (x+1)'e^{-x} + (e^{-x})(x+1)' \\ &= e^{-x} - e^{-x}(x+1) = -xe^{-x}; \forall x \in \mathbb{R}^- \end{aligned}$$

$$f'_1(x) = -xe^{-x}$$

• Calculons $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, f est dérivable en tant que sommes et produits de fonctions dérivables et on note $f'_2(x)$ sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$.

4-b°). Sens de Variation de f sur $] -\infty; 0[$

$\forall x \in \mathbb{R}^-$; $f'_1(x) = -xe^{-x}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $e^{-x} > 0$ et $-x \geq 0$ donc $-xe^{-x} \geq 0$, c'est-à-dire $f'_1(x) \geq 0$ donc il vient que f est croissante sur $\mathbb{R}^-$

4-a). Calculons $b_2'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

$$b_2'(x) = (1 - 2x + x \ln x)'$$

$$= (1 - 2x)' + (x \ln x)' = -2 + \ln x + 1 = \ln x - 1$$

$$b_2'(x) = \ln x - 1 ; \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

4-b). Sens de variation de β sur $]0; +\infty[$.

Signe de $b_2'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$;

$$b_2'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e.$$

$\forall x \in]0; e]$: $b_2'(x) \leq 0$ donc β est décroissante sur $]0; e]$.

$\forall x \in [e; +\infty[$: $b_2'(x) \geq 0$ donc β est croissante sur $[e; +\infty[$.

• Tableau de variation de β sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
$b_2'(x)$	+	-	-	+
$\beta(x)$	$-\infty$	0	$1-e$	$+\infty$

$$\beta(e) = 1 - 2e + e \ln e$$

$$= 1 - 2e + e$$

$$\beta(e) = 1 - e$$

5-a) Soit A le point d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses. On donne $x \in]-\infty; 0]$.

Rappel: si un point est sur l'axe (Ox) , alors son ordonnée est nulle.

Principe: résoudre l'équation $\beta(x) = 0$.

$$\text{Sur }]-\infty; 0]; \beta(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \text{ (car } e^{-x} > 0)$$

$$x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1. \text{ D'où } A(-1; 0)$$

5-b) Equation de la tangente au point d'abscisse -1 .

$$(T): y = \beta'(-1)(x+1) + \beta(-1) ; \forall x \in]-\infty; 0]$$

(4)

$$f(x) : y = e(x+1) + 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} f'(-1) = -(-1)e^{-(-1)} = e \dots \\ f(-1) = (-1+1)e^{-(-1)} = 0 \end{cases}$$

$$f(x) : y = xe + e$$

6). $\forall x \in [e; +\infty[$; f est continue et strictement croissante, alors elle réalise une bijection de $[e; +\infty[$ vers $[1-e; +\infty[$. Comme $0 \in [1-e; +\infty[$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [e; +\infty[$.

• Montrons que $\alpha \in]6; 7[$

$$f(6) = 1 - 12 + 6 \ln 6 = 1 - 12 + 6(1,8) = -0,2 < 0$$

$$f(7) = 1 - 14 + 7 \ln 7 = 1 - 14 + 7(1,9) = 0,3 > 0$$

$$\textcircled{8} \quad f(6) \times f(7) < 0 \Rightarrow \alpha \in]6; 7[$$

$$\begin{aligned} 7-a). \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{1} + \frac{1}{x} e^{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^x} + \frac{1}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} + \frac{1}{xe^x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right) e^{-x} = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2x + x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - 2 + \ln x = +\infty$$

7-b). Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, alors (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

• Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ alors (C) admet une branche parabolique de direction l'axe (Oy)

Partie B

On donne: $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = -f(x)$

10) Dressons le tableau de variation de h .

	$-\infty$	0	e	$+\infty$
	-	:	+	-
	$+\infty$	-1	$e-1$	$-\infty$

20) (C') et (C) sont symétriques par rapport à l'axe (Ox)

30) $\forall x \leq 0, U(x) = (-x-2)e^{-x}$

40) Il paraît une primitive de f que si $U'(x) = f(x)$.

$$U'(x) = (-2-x)'e^{-x} + (e^{-x})'(-2-x)$$

$$= -e^{-x} - e^{-x}(-2-x)$$

$$U'(x) = -e^{-x}(1-2-x) = e^{-x}(1+x) = f(x) \quad \forall x \leq 0.$$

Conclusion: Comme $U'(x) = f(x) \quad \forall x \leq 0$ alors U est une primitive de $f(x)$.

3-b0) Sur $\mathbb{I}[-1; 0]$; (C) est au dessous de (C') , alors on a:

$$A_0 = \int_{-1}^0 [f(x) - h(x)] dx \times M, \text{ car on } h(x) = -f(x), \text{ on a donc}$$

$$A_0 = \int_{-1}^0 2f(x) dx \times M = 2 \left[U(x) \right]_{-1}^0 \text{ car } U \text{ est une primitive de } f.$$

$$= 2 \left[(-x-2)e^{-x} \right]_{-1}^0 \times M = 2(-2e^0 - (-1-2)e^1) \times 200 \times 200$$

$$= 2(-2 + e) \cdot 40000 \Rightarrow A = 8(e-2) \text{ cm}^2$$

Partie C

On donne:
$$\begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = (1 - \ln t)t \end{cases} ; t \geq 1$$

1) Déterminons une équation cartésienne de (Γ)

On sait que $x = \ln t \Rightarrow t = e^x$

$y = (1 - x)e^x \quad \forall x \geq 0$

2) Déterminons les coordonnées du vecteur dérivé

$\vec{v}(t)$ pour $t = e^{-1}$

$$\begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = (1 - \ln t)t \end{cases} ; \vec{v}(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = x'(t) \\ \dot{y}(t) = y'(t) \end{cases}$$

$x(t)$ est dérivable et $\dot{x}(t) = x'(t) = \frac{1}{t} ; \forall t \geq 1$

$y(t)$ est dérivable et $\dot{y}(t) = y'(t) = -\frac{1}{t} \cdot t + (1 - \ln t)$

$= -1 + 1 - \ln t$

$y'(t) = -\ln t$

Conclusion: $\vec{v}(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \\ -\ln t \end{cases} ; \forall t \geq 1$

À $t = e^{-1}$; on a: $\vec{v}(e^{-1}) = \begin{cases} e \\ 1 \end{cases}$