

TOUTES OPTIONS INDUSTRIELLES

1<sup>er</sup> tour

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

(Les calculatrices non programmables sont autorisées)

Coefficient : 2  
Durée : 2 heures

**EXERCICE** (7 points)

- 1) Soit l'équation différentielle  $(E): y' - 9y = 0$ 
  - a) Donner la solution générale de l'équation différentielle  $(E)$ . (1,5 pts)
  - b) Déterminer la solution particulière  $(f)$  de l'équation différentielle  $(E)$  vérifiant la condition suivante  $f(0) = 2$ . (1,5 pts)
- 2) Soit l'équation différentielle  $(E'): y'' + 2y = 0$ 
  - a) Donner la solution générale de l'équation différentielle  $(E')$ . (1,5 pts)
  - b) Déterminer la solution particulière  $(g)$  vérifiant la condition suivante  $g(0) = -1$  et  $g'(0) = \sqrt{2}$ . (2,5 pts)

**PROBLEME** (13 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x \ln x - x$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2cm.

- 1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . (1 pt)  
b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . (1 pt)
- 2) Déterminer dérivée  $f'$  de  $f$ . (1 pt)
- 3) Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $]0; +\infty[$  et donner le sens de variation de  $f$ . (1 pt)
- 4) Dresser le tableau de variation de  $f$ . (1 pt)
- 5) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  au point d'abscisse  $x_0 = e$ . (1 pt)
- 6) Déterminer les coordonnées du point  $A$  distinct de l'origine du repère, intersection de  $(C)$  et l'axe des abscisses. (1 pt)
- 7) Construire dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la tangente  $(T)$  et la courbe  $(C)$ . (2 pts)
- 8) Soit la fonction  $g$  définie  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{1}{4}x^2(-3 + 2 \ln x)$ 
  - a) Montrer que  $g$  est la primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ . (1 pt)
  - b) Soit  $\alpha$  un réel tel que  $0 < \alpha < e$ . Calculer l'aire  $A(x)$  de la partie du plan délimitée par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = \alpha$  et  $x = e$ . (1 pt)
  - c) Calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} A(\alpha)$ . (1 pt)

On donne :  $e = 2,7$