

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Calculatrice non autorisée)

Coefficient : 7 pour la C

Coefficient : 6 pour la E

Durée : 4 heures

EXERCICE (4 points)

Dans cet exercice, toutes les questions sont indépendantes. Pour les 4 questions, reproduis le tableau ci-dessous et complète-le en indiquant la lettre correspondant à la bonne réponse pour chaque question.

Numéro de la question	1	2	3	4
Lettre correspondant à la bonne réponse				

- On considère deux points R et S de l'espace. On désigne par K le milieu du segment [RS]. Quel est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{MR} = 0$? (1pt)
 - $\emptyset$
 - $\{K\}$
 - le plan médiateur du segment [RS]
 - la sphère de diamètre RS
- Quelle est l'équation cartésienne du plan P représenté paramétriquement par

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda - \mu \\ y = 3 - \lambda + 2\mu \\ z = 1 + 2\lambda + \mu \end{cases}$$
 (1pt)
 - $3x - y + z = 8$
 - $2x + y - z = 5$
 - $x + 2y + 3z = 10$
 - $4x - 3y + 2z = 7$
- Soit ABCD un rectangle de centre I tel que $AB = 4$ et $BC = 3$. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 25$? (1pt)
 - $\emptyset$
 - $\{I\}$
 - Le cercle de centre I et de rayon 5
 - La médiatrice du segment [AC]
- Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue n tirs consécutifs et indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs. Quelle est la valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à 0,9 ? (1pt)
 - 6
 - 7
 - 10
 - 12

PROBLEME (11 points)

Partie A : (4,25 points)

On désigne par U l'ensemble des nombres complexes de module 1 et dont un argument est dans l'intervalle $]0; \pi[$.

- 1) A tout nombre complexe z de U , on associe le nombre complexe z' tel que : $z' = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$
 - a) Montre que $z' = \frac{z+1}{z-2+z}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z . (0,25pt)
 - b) z' peut-il être un réel non nul ? (0,25pt)
 - c) Existe-t-il des nombres complexes z tels que $z' = z$? (0,25pt)
- 2) a) Soit z un élément de U , d'argument θ dans $]0; \pi[$. Exprime en fonction de $\frac{\theta}{2}$ le module et un argument de $z+1$, $z-1$ et $(z-1)^2$. (0,75pt)
b) Déduis le module et un argument de z' en fonction de $\frac{\theta}{2}$. (0,5pt)
c) Déduis la partie réelle X et la partie imaginaire Y de z' .
 z' peut-il être un imaginaire pur ? (0,75pt)
- 3) On pose $X = g(\theta)$ et $Y = h(\theta)$.

Dans un repère orthonormal, on associe à tout nombre réel θ de $]0; \pi[$ un point mobile M de coordonnées $X = g(\theta)$ et $Y = h(\theta)$.

Montre que sa trajectoire est une conique ($\mathcal{P}$) et précise l'équation et les éléments caractéristiques (foyer et directrice). (0,5pt)

Partie B : (2,25 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2}$ et on note ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormal ($O; \vec{i}; \vec{j}$) d'unité graphique 2 cm.

- 1) Détermine les réels a , b et c tels que pour tout réel $x \neq 1$, on ait

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \quad (0,75\text{pt})$$

- 2) Détermine le signe de f sur $[-1; 0]$. (0,5pt)
- 3) Calcule l'aire ($\mathcal{A}$) en unités d'aire de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathcal{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$. (1pt)

Partie C : (4,5 points)

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$ par $\varphi(x) = \frac{1}{2} \ln[f(x)]^2$.

- 1) Calcule les limites aux bornes de cet ensemble. Précise les asymptotes. (2,5pts)
- 2) Etudie les variations de φ et dresse son tableau de variations. (1,5pt)
- 3) Construit la courbe (Γ) de φ dans le repère précédent. (0,5pt)

Situation d'intégration (5 points)

Le groupement de femmes Wend-Yam est spécialisé dans la production et la vente de pagnes traditionnels Faso Danfani depuis 2020. Une étude de leur activité au cours des quatre premières années a donné les résultats suivants :

Rang de l'année (x)	1	2	3	4
Production en unités de pagnes Faso (y)	150	200	300	380

Une organisation culturelle prévoit de commander 900 pagnes à la septième année pour un événement spécial.

Le coût initial de production d'un pagne est de 4500 francs. Pour rester compétitif, le groupement améliore sans cesse la qualité de son pagne, entraînant une augmentation du coût de production de 5% depuis la première année. Cependant la production ne sera plus rentable si le coût de production d'un pagne atteint 7000 francs.

Afin de diversifier ses activités et d'anticiper sur un éventuel ralentissement de la production de pagnes, le groupement lance une unité de production et de vente de jus de mangue. Pour cela il a besoin d'un terrain pour implanter sa nouvelle unité. Un particulier propose de vendre au groupement un terrain dont la forme est modélisée dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 10 mètres, par la courbe d'équation

$$\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 25.$$

Le groupement souhaite tout d'abord, savoir s'il pourra satisfaire la commande de l'organisation culturelle ; ensuite, connaître l'années à partir de laquelle la production de pagnes ne sera plus rentable ; enfin, connaître la forme du nouveau terrain afin de prévoir la disposition des différents ateliers pour la fabrication du jus.

Ta tante, Présidente du groupement, te sollicite, en tant qu'élève en classe de Terminale Scientifique, de l'aider.

À l'aide d'une production détaillée, basée sur tes connaissances en Mathématiques, détermine :

- 1) Si le groupement sera en mesure de satisfaire la commande de l'organisation culturelle. (1,5 pt)
- 2) L'années à partir de laquelle la production de pagnes ne sera plus rentable pour le groupement. (1,5 pt)
- 3) La forme du terrain proposé par le particulier. (1,5 pt)

Présentation (0,5 pt)

On donne : $\frac{\ln(\frac{14}{9})}{\ln(1.05)} \approx 9,056.$