

COMPOSITION DU DEUXIÈME TRIMESTRE

EXERCICE (4× 1 point)

Dans cet exercice, toutes les questions sont indépendantes. Pour les 4 questions, reproduis le tableau ci-dessous et complète-le par la lettre correspondant à la bonne réponse.

Numéro de la question	1	2	3	4
Lettre correspondant à la bonne réponse				

1. Soit z un nombre complexe non nul et θ un argument de z .

Le nombre complexe $\frac{(-1 + i\sqrt{3})^2}{\bar{z}}$,

où \bar{z} est le conjugué de z , a pour argument :

(a) $-\frac{\pi}{3} + \theta$.

(c) $\frac{2\pi}{3} - \theta$

(b) $-\frac{\pi}{3} - \theta$

(d) $-\frac{2\pi}{3} + \theta$

2. La solution de l'équation différentielle $25y'' + y = 0$

vérifiant $y(5\pi) = 2$ et $y'(5\pi) = -3$ est :

(a) $15 \sin \frac{x}{5} - 2 \cos \frac{x}{5}$.

(c) $-15 \sin \frac{x}{5} - 2 \cos \frac{x}{5}$

(b) $15 \sin \frac{x}{5} + 2 \cos \frac{x}{5}$

(d) $2 \cos \frac{x}{5} - 15 \sin \frac{x}{5}$

3. On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel n par : $U_n = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-n}$.

(a) (U_n) est une suite géométrique de raison e .

(c) (U_n) est une suite divergente.

(b) (U_n) est une suite arithmétique.

(d) $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{1 - e^{-2}}{2} \cdot \frac{1 - e^{-n-1}}{1 - e^{-1}}$.

4. On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , les points A , B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + i, \quad b = 3i, \quad c = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right).$$

(a) Le triangle ABC est rectangle en A .

(c) Le triangle ABC est équilatéral.

(b) Le triangle ABC est isocèle en A .

(d) Les points A , B et C sont alignés.

PROBLÈME (11 points)

Partie A (2,5 points)

On considère l'équation différentielle définie par : $(E) : \frac{1}{2}y' + y = 3e^{-2x} + 2$.

1. Déterminer le réel a , tel que la fonction v définie par $v(x) = axe^{-2x} + 2$ soit une solution de l'équation (E). **0,5 pt**

2. Donner les solutions de l'équation $(E') : \frac{1}{2}y' + y = 0$. **0,25 pt**

3. (a) Montrer que u est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E') . **1 pt**

(b) En déduire les solutions de (E). **0,5 pt**

4. Déterminer la solution particulière h de l'équation (E) vérifiant $h(0) = 0$. **0,25 pt**

Partie B (7,5 points)

On définit la fonction f sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} 2(3x - 1)e^{-2x} + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x \ln x}{1 + x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Unité graphique : 4 cm.

I) Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x + \ln x$.

1. (a) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$. **0,5 pt**
 (b) Déterminer le sens de variation de g . **0,5 pt**
 (c) Dresser le tableau de variations de g . **0,5 pt**
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$. Montrer que α appartient à l'intervalle $]0,2; 0,3[$. **0,5 pt**
3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . **0,5 pt**

II) Étude de la représentation graphique de f

1. Étudier la continuité de f en 0. **0,5 pt**
2. Étudier la dérivabilité de f en 0. Donner une interprétation graphique. **1 pt**
3. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. **0,5 pt**
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat obtenu. **0,5 pt**
5. Étudier le sens de variation de f sur \mathbb{R} . **1 pt**
 (On montrera que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.)
6. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$ et déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe (Ox) . **0,25 pt + 0,25 pt**
7. Dresser le tableau de variations de f . **0,5 pt**
8. Construire (C_f) . **0,5 pt**

Partie C (1,5 point)

Soit $\lambda < 0$. On note $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équations : $x = \lambda$, $x = 0$, $y = 0$ et la courbe (C_f) .

1. On pose $F(x) = (ax + b)e^{-2x}$.
 Déterminer a et b pour que F une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto (3x - 1)e^{-2x}$. **0,5 pt**
2. Calculer $A(\lambda)$ en cm^2 . **0,5 pt**
3. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$. **0,25 pt**

On donne : $\ln 2 = 0,70$; $\ln 3 = 1,10$; $\ln 5 = 1,61$.

SITUATION D'INTÉGRATION (5 points)

Dans le cadre de la lutte contre la désertification dans la région du Nord au Burkina Faso, le ministère de l'environnement lance un appel à projets pour le reboisement de terrains dégradés. Trois associations locales : Sougrinoma, Fofu et Hèrèsò, décident de participer à ce projet.

La direction régionale de l'environnement fournit gratuitement les plants mais impose la condition d'une surface de $1,5 \text{ m}^2$ par plant. La direction régionale de l'environnement dispose suffisamment de plants pour satisfaire les besoins des trois associations.

- L'association Sougrinoma dispose d'un terrain à forme géométrique non régulière délimitée par la courbe (C) d'équation $y = x + \ln(1 + x)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$ dans un plan muni d'un repère orthonormé d'unité 100 mètres.
- L'association Fofu dispose d'un terrain trapézoïdal dont les affixes des sommets dans un plan muni d'un repère orthonormé d'unité 25 mètres sont solutions dans \mathbb{C} de l'équation :
 $(z - 1 - i)(z - 6 - 4i)(z^2 - (5 + 5i)z + 17i) = 0$.

Les associations Sougrinoma et Fofu envisagent planter respectivement 7000 plants et le maximum de plants possible.

Les responsables des associations te sollicitent en tant qu'élève de la terminale D pour les situer sur leurs préoccupations.

À l'aide d'une production détaillée et sur la base de tes connaissances en Mathématiques, détermine :

1. Si l'association Sougrinoma pourra planter ses 7000 plants.
2. Le nombre maximum de plants que l'association Fofu pourra planter.

Présentation : 0,5 pt

On donne $\ln 2 \approx 0,7$