

série A4

Sujet A

MATHEMATIQUES

PROPOSITION DE CORRIGE

Exercice: QCM (5 pts)

- 1) a 0,5 5) c 0,5 9) d (0,5)
2) b 0,5 6) b 0,5 10) b (0,5)
3) a 0,5 7) c 0,5
4) a 0,5 8) d 0,5

Problème (10 points)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 - \ln x, \quad x \in]0; +\infty[$$

1) a) Calculons la limite de f en 0^+ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 - \ln x \right) \\ &= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty \end{cases} \end{aligned} \quad (0,5 \text{ pt})$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à la courbe (\mathcal{C})

b) Vérifions que $f(x) = x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right)$ (0,5 pt)
 $\forall x \in]0; +\infty[.$

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; +\infty[, \quad x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right) &= x^2 \times \frac{1}{2} + \frac{x^2}{x^2} - x^2 \times \frac{\ln x}{x^2} \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 1 - \ln x \\ &= f(x) \quad (1/6) \end{aligned}$$

d'où $f(x) = x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right)$ pour tout réel $x \in]0; +\infty[$ 1pt

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right)$
 $= +\infty$ car: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \end{cases}$ 1pt

2) a) Calculons $f'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.
 f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$ 1pt

b) Étudions le signe de $f'(x)$.
 $\forall x \in]0; +\infty[, x > 0$ et $x+1 > 0$ donc $f'(x)$ a le signe de $x-1$.

Donc: $\forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0$

$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) > 0$ 1pt

Si $x = 1, f'(1) = 0$

c) Sens de variation de f .

Sur $]0; 1[, f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante

Sur $]0; 1]$.

Sur $]1; +\infty[, f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

tableau de variation de f

$$f(1) = \frac{1}{2} + 1 - 0 = \frac{3}{2}$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$

(1 pt)

3) Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

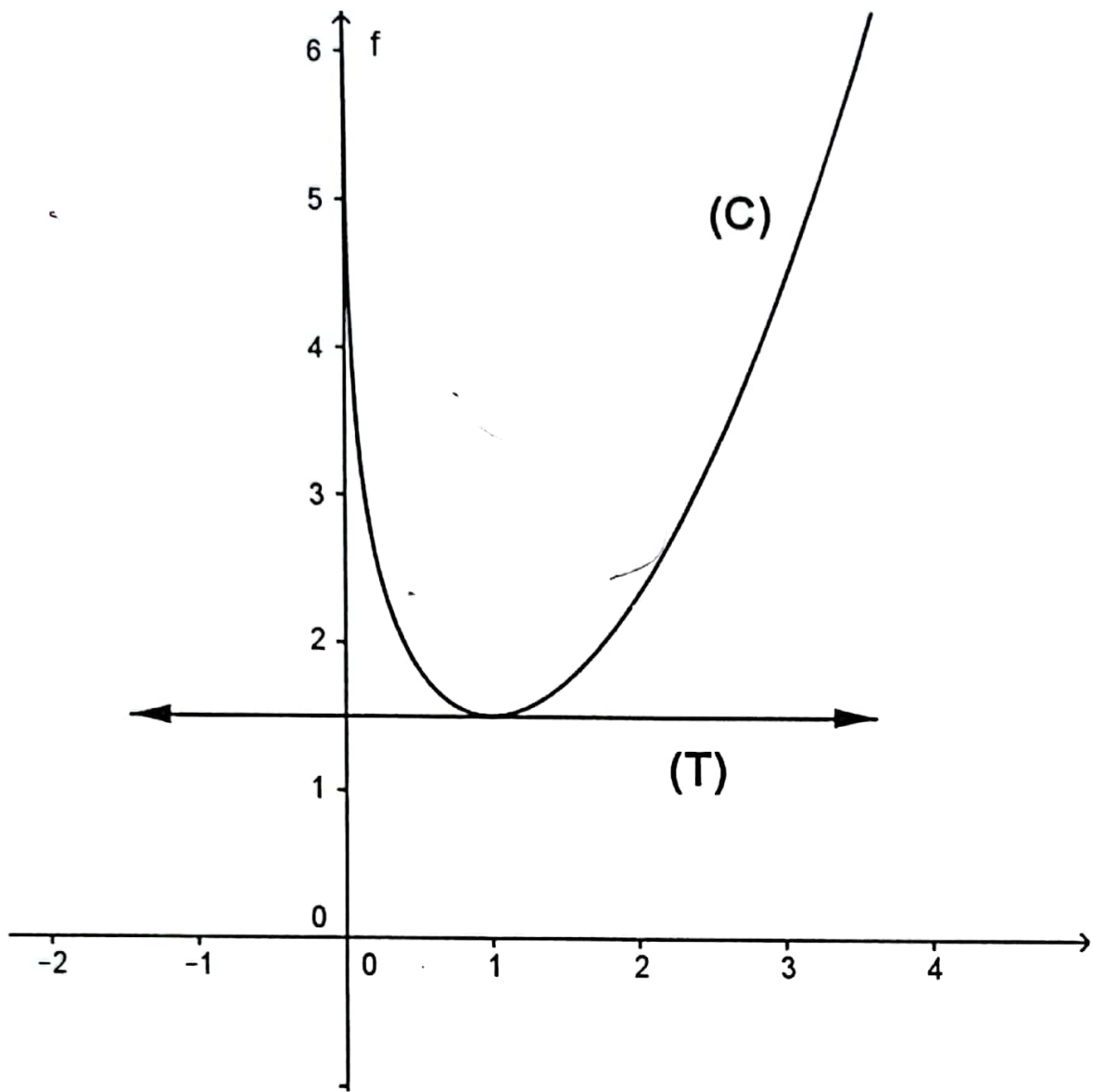
$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$(T): y = \frac{3}{2}$$

1 pt

4) Construction: (C): 4 pt
(T): 9.5 pt

3/6



4/6

A4

Situation 1 : grille de correction

Critères	Pertinence	Utilisation correcte des outils	Cohérence dans l'agencement	Perfectionnement
<p>Consigne 1 : nombre de femmes et d'hommes qui devraient cotiser</p>	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Mise en système d'équations ✓ Résolution ✓ Conclusion <p>0,25 pt x 4 = 1</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Soit x le nombre de femmes et y le nombre d'hommes • $x + y = 1200$ • $1000x + 2000y = 2000000$ • Résolution correcte du système <p>0,75 pt x 4 = 3</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Le résultat produit est conforme au résultat attendu (400 femmes et 800 hommes) • Le résultat produit est en adéquation avec la démarche • La qualité des enchainements de la démarche <p>0,5 pt x 4 = 2</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Présentation n • Lisibilité • Absence de rature • Résultats encadrés <p>0,5 pt x 4 = 2</p>
<p>Consigne 2 : nombre de tickets de chaque sorte</p>	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Résolution de l'équation ✓ Conclusion <p>0,25 pt x 4 = 1</p>	<ul style="list-style-type: none"> • $x^2 - 700x + 120000 = 0$ • Discriminant $\Delta = 100^2$ • Calcul de $x_1 = 300$ et $x_2 = 400$ <p>0,5 pt x 4 = 2</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Le résultat produit est conforme au résultat attendu (300 tickets de 200 F et 400 tickets de 300 F ou encore 300 tickets de 300 F et 400 tickets de 200 F) • Le résultat produit est en adéquation avec la démarche • La qualité des enchainements de la démarche <p>0,5 pt x 4 = 2</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Résultats encadrés <p>0,5 pt x 4 = 2</p>

5/6

A4

<p>Consigne 3 : le jeu est favorable ou défavorable au joueur</p>	<p>✓ Loi de probabilité ✓ Espérance mathématique ✓ Conclusion</p> <p>0,25 pt x 4 = 1</p>	<p>Loi de probabilité</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>X</td> <td>-</td> <td>5</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td></td> <td>20</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </table> <p>P(X=k)</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>3</td> <td>2</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>$\frac{3}{6}$</td> <td>$\frac{2}{6}$</td> <td>$\frac{1}{6}$</td> </tr> </table> <p>• Espérance mathématique E(X) = -400/3</p> <p>• E(X) est négatif. donc</p> <p>0,75 pt x 4 = 3</p>	X	-	5	10		20	0	0	3	2	1	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	<p>• Le résultat produit est conforme au résultat attendu (le jeu est défavorable au joueur)</p> <p>• Le résultat produit est en adéquation avec la démarche</p> <p>• La qualité des enchainements de la démarche</p> <p>0,5 pt x 4 = 2</p>	
X	-	5	10															
	20	0	0															
3	2	1																
$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$																

Consigne 1

le jeu est défavorable.

$$3 + 9 + 6 + 2 = \frac{20}{4} = 5 \text{ pts}$$

6/8