EXAMEN DU BACCALAUREAT
DE L'ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION NORMALE DE 2025

SERIES : C et E

BURKINA FASO

La Patrie ou la Mort, nous Vaincrons

2nd tour

PROPOSITION DE CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Calculatrice non autorisée)

EXERCICE (4 points)

Numéro de la question	1	2	3	4
Lettre correspondant à la bonne réponse	d	a	b	b

PROBLEME (11 points)

Partie A

Si $z \in U$ alors $|z| = 1$ et argument de $z \in]0;\pi[$, on note que $\bar{z} = \frac{1}{z}$

1) A tout nombre complexe z de U ,on associe le nombre complexe z' tel que :

$$z' = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$$

a) Montrons que $z' = \frac{z+1}{\bar{z}-2+z}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z .

En multipliant par $\bar{z}$ le numérateur et le dénominateur, on aura

$z' = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2} = \frac{\bar{z}z(z+1)}{\bar{z}(z-1)^2} = \frac{\bar{z}z(z+1)}{\bar{z}zz-2\bar{z}z+\bar{z}} = \frac{z+1}{\bar{z}-2+z}$ car $\bar{z}z = |z| = 1$ **(0,25pt)**

b) Vérifions si z' peut être un réel non nul ou pas.

On a z' réel ssi $z' = \overline{z'}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{z+1}{\bar{z}-2+z} = \frac{\bar{z}+1}{z-2+\bar{z}}$ $\Leftrightarrow z = \bar{z}$ d'où z est réel.

Comme z est de module 1, alors $z = -1$ ou $z = 1$

On sait que z' est défini si $z \neq -1$ et $z \neq 1$donc z' ne peut pas être un réel non nul. **(0,25pt)**

c) Vérifions s'il existe des nombres complexes z tels que $z' = z$ ou non.

On a $z' = z \Leftrightarrow z(z^2 - 3z) = 0 \Leftrightarrow$ $z = 0$ ou $z = 3$.

Comme $|z| = 1$,aucune solution ne convient. Donc il n'existe pas de nombres complexes z tels que $z' = z$. **(0,25pt)**

2) a) Soit $z \in U$ et $arg z = \theta \in]0;\pi[$.

Exprimons en fonction de $\frac{\theta}{2}$ le module et l'argument en fonction de $\frac{\theta}{2}$

On a $z = cos\theta + isin\theta$

D'où $z + 1 = 1 + cos\theta + isn\theta$

$=2cos^2\frac{\theta}{2} - 1 + 1 + 2isin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}$

$=2cos\frac{\theta}{2}(cos\frac{\theta}{2} + isin\frac{\theta}{2})$

Or $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ donc $cos\frac{\theta}{2}>0$ et $sin\frac{\theta}{2}>0$

Par suite $|z+1|=2cos\frac{\theta}{2}$ et $arg(z+1)=\frac{\theta}{2}\ [2\pi]$ **(0,25pt)**

- On a $z-1=cos\theta-1+isin\theta$

$$=-2sin^2\frac{\theta}{2}+2isin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}$$
$$=2i^2sin^2\frac{\theta}{2}+2isin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}$$
$$=2isin\frac{\theta}{2}(cos\frac{\theta}{2}+isin\frac{\theta}{2})$$
$$=2e^{i\frac{\pi}{2}}.sin\frac{\theta}{2}.e^{i\frac{\theta}{2}}$$
$$=2\ sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})}.$$

Or $sin\frac{\theta}{2}>0$ puisque $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ donc

$|z-1|=2sin\frac{\theta}{2}$ et $arg(z-1)=\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}[2\pi]$ **(0,25pt)**

- On a $(z-1)^2=4sin^2\frac{\theta}{2}e^{i(\theta+\pi)}$. par suite,

$|(z-1)^2|=4sin^2\frac{\theta}{2}$ et $arg(z-1)^2=\theta+\pi\ \ [2\pi]$ **(0,25pt)**

b) Déduisons le module et un argument de z' en fonction de $\frac{\theta}{2}$.

On a $|z'|=\frac{2cos\frac{\theta}{2}}{4sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{cos\frac{\theta}{2}}{2sin^2\frac{\theta}{2}}$ et $argz'=argz+arg(z+1)-2arg(z-1)=\frac{\theta}{2}-\pi\ [2\pi]$

c) Déduis la partie réelle X et la partie imaginaire Y de z'.

On a $X=\frac{cos\frac{\theta}{2}}{2sin^2\frac{\theta}{2}}cos(\frac{\theta}{2}-\pi)=\frac{-cos^2\frac{\theta}{2}}{2sin^2\frac{\theta}{2}}=-\frac{1}{2tan^2\frac{\theta}{2}}$ **(0,25pt)**

et

$Y=\frac{cos\frac{\theta}{2}}{2sin^2\frac{\theta}{2}}sin(\frac{\theta}{2}-\pi)=\frac{-cos\frac{\theta}{2}}{2sin\frac{\theta}{2}}=-\frac{1}{2tan\frac{\theta}{2}}$. **(0,25pt)**

z' peut-il être un imaginaire pur ?

On a z' est un imaginaire pur $\Leftrightarrow X=0\Leftrightarrow cos\frac{\theta}{2}=0\ donc\,|z'|=0\ soit z'=0$

On conclut que z' ne peut pas être un imaginaire pur non nul. **(0,25pt)**

3) On pose $X=g(\theta)$ et $Y=h(\theta)$

Dans un repère orthonormal, on associe à tout nombre réel θ de $]0;\pi[$ un point mobile M de coordonnées $X=g(\theta)$ et $Y=h(\theta)$.

Montrons que sa trajectoire est une conique $(\mathcal{P})$ et précisons l'équation et les éléments caractéristiques.

Soit $M(X;Y)\in(\mathcal{P})\Leftrightarrow X=-2Y^2$ avec $X\leq 0$ et $Y\leq 0$.

Son foyer est $F(-\frac{1}{8};0)$ et sa directrice $(\mathfrak{D})$ a pour équation $x=\frac{1}{8}$. **(0,25pt)+ (0,25pt)**

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x) = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2}$ et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm

1) Déterminons les réels a ; b et c tels que pour tout réel $x \neq 1$, on ait

$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-)^2}$. On a $f(x) = 1 + \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-)^2}$

d'où : $a = 1$; $b = 3$ et $c = 2$. **(0,25pt)+ (0,25pt)+ (0,25pt)**

2) Déterminons le signe de f sur $[-1\,;0]$.
$\forall x \in [-1\,;0]$, $x \leq 0$; $x+1 \geq 0$ et $(x-1)^2 > 0$. Donc $\frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \leq 0$ c'est-à-dire que $f(x) \leq 0$. Ainsi $f \leq 0$ sur $[-1\,;0]$. **(0,5pt)**

3) Calculons l'aire ($\mathcal{A}$) en unités d'aire de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathcal{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ *et* $x = 0$

On a $\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} -f(x)dx.ua$ **(0,25pt)**

$\Leftrightarrow \mathcal{A} = \left[-x - 3ln(1-x) + \frac{2}{x-1}\right]_{-1}^{0}.ua$ **(0,5pt)**

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ =$(0 - 2 - (1 - 3ln2 - 1)).ua = (-2 + 3ln2).ua$

Donc $\mathcal{A} = (-2 + 3ln2).ua = 4(-2 + 3ln2)cm^2$ **(0,25pt)**

Partie C

Soit φ *la fonction définie par* $\varphi(x) = \frac{1}{2}ln[f(x)]^2$

1) *Calculons les limites de* f *aux bornes de* D_φ *et Précisons les asymptotes.*

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to1} ln(x) = 0$.
(0,25pt)+ (0,25pt)
On en déduit alors que l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe représentative de φ *en* $-\infty$*et en* $+\infty$. **(0,25pt)**
- $\lim\limits_{x\to-1} \varphi(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to0} \varphi(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to1} \varphi(x) = +\infty$ **(0,25pt)+ (0,25pt)**
On déduit que les droites d'équations $x = -1$; $x = 0$ *et* $x = 1$ *sont des asymptotes verticales à la courbe* **(0,25pt)**

2) *Etudions les variations de* φ *et dressons son tableau de variations.*
φ *est dérivable sur chacun des intervalles de* D_φ *en tant que composée de fonctions dérivables sur* D_φ.
On a $\varphi(x) = \frac{1}{2}ln[f(x)]^2$; *on en déduit alors que* $\varphi(x) = ln|f(x)|$.
D'où $\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow \varphi'(x) = \frac{-3x-1}{x(x-1)(x-1)}$. **(0,5pt)**
Etude du signe de $\varphi'(x)$

x	$-\infty$		-1		$\frac{-1}{3}$		0		1		$+\infty$
$x(-3x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$(x-1)(x+1)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\varphi'(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	

Par suite :

φ est croissante sur les intervalles $\left]-1;-\frac{1}{3}\right[$ et $]0;1[$

φ est décroissante sur les intervalles $]-\infty;-1[$ et $]1;+\infty[$ **(0,25pt)+ (0,25pt)**

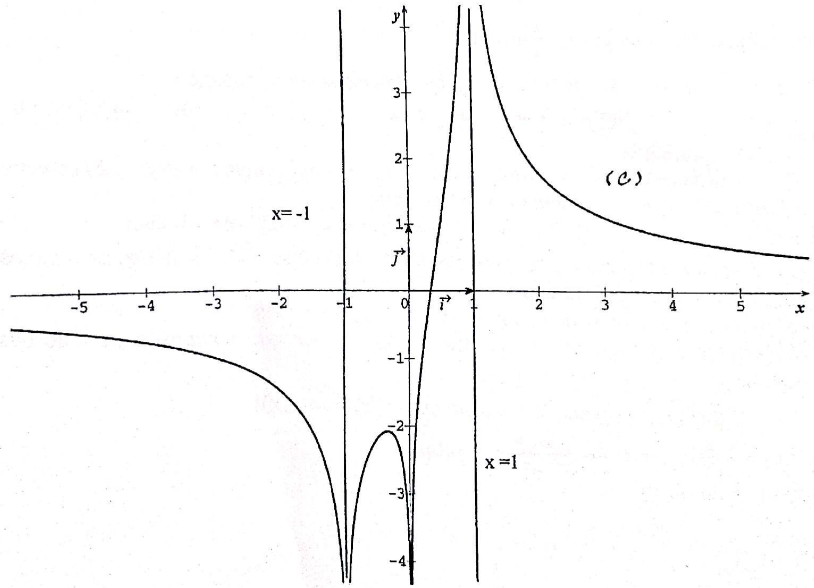
<u>Tableau de variations de φ</u> **(0,5pt)**

x	$-\infty$		-1		$\frac{-1}{3}$		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	
φ	0	$\searrow$	$-\infty \| -\infty$	$\nearrow$	$-3ln(2)$	$\searrow$	$-\infty \| -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \| +\infty$	$\searrow$	0

3) Construisons la courbe ($\mathcal{C}$) de φ dans le repère.

la courbe ($\mathcal{C}$) : **(0,25pt)**

Les asymptotes : (0,25pt)



Situation d'intégration (5 points)

1) Déterminons si le groupement sera en mesure de satisfaire la commande de l'organisation culturelle.

1ère méthode : méthode de Mayer.

On a : $G_1(1{,}5;175)$ **(0,25pt)**, $G_2(3{,}5;340)$ **(0,25pt)** et $a = \frac{340-175}{3{,}5-1{,}5} = 82{,}5$ **(0,25pt)**

La droite d'ajustement a pour équation $y = 82{,}5x + b$. Comme $G_1(1{,}5;175)$ appartient à cette droite alors $b = 51{,}25$, **(0,25pt)** d'où $y = 82{,}5x + 51{,}25$. **(0,25pt)**

En prenant $x = 7$, on obtient $y = 628{,}75 \approx 629$. **(0,25pt)**

Comme $900 > 629$, alors le groupement ne sera pas en mesure de satisfaire la commande de l'organisation culturelle. **(0,5pt)**

2ème méthode : méthode des moindres carrés.

La droite de régression linéaire a pour équation $y = ax + b$, où $a = \frac{cov(x,y)}{v(x)}$;

On a : $\bar{x} = 2{,}5$; $\bar{y} = 257{,}5$; $\bar{x}\bar{y} = 643{,}75$; $\overline{xy} = 742{,}5$; $\overline{x^2} = 7{,}5$ et $(\bar{x})^2 = 6{,}25$; donc $a = \frac{\overline{xy}-\bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2}-(\bar{x})^2} = \frac{98{,}75}{1{,}25} = 79$ et $b = \bar{y} - a\bar{x} = 257{,}5 - 79 \times 2{,}5 = 60$.

La droite de régression linéaire a pour équation $y = 79x + 60$.

En prenant $x = 7$, on obtient $y = 613$.

Comme $900 > 613$, alors le groupement ne sera pas en mesure de satisfaire la commande de l'organisation culturelle.

2) Déterminons l'année à partir de laquelle la production de pagnes ne sera plus rentable pour le groupement.

Désignons par u_n le cout de production d'un pagne la $n^{ème}$ année ($u_1 = 4500$). **(0,25pt)**

On a : $u_{n+1} = u_n + 0{,}05u_n = 1{,}05u_n$, donc (u_n) une est la suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme $u_1 = 4500$. **(0,25pt)**

Par suite $u_n = 4500 \times (1{,}05)^{n-1}$. **(0,25pt)**

On a : $u_n \geq 7000 \Leftrightarrow 4500 \times (1{,}05)^{n-1} \geq 7000 \Leftrightarrow (1{,}05)^{n-1} \geq \frac{14}{9}$

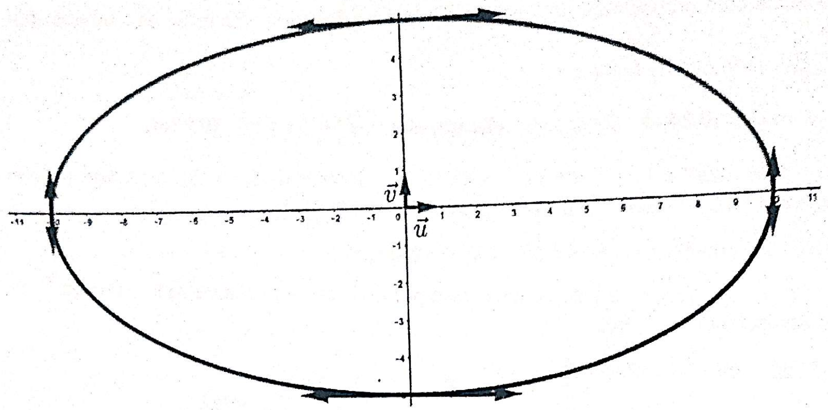
$\Leftrightarrow n \geq 1 + \frac{\ln\left(\frac{14}{9}\right)}{\ln(1{,}05)} \approx 10{,}056$; On prend $n = 11$. **(0,5pt)**

À partir de la 11ème année, soit à partir de 2030, la production de pagnes ne sera plus rentable pour le groupement. **(0,25pt)**

3) Déterminons la forme du terrain proposé par le particulier.

On a : $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$. **(0,5pt)**

Le terrain a une forme elliptique.



Critères minimaux (CM)	Indicateurs	Barème	Total
	-Le résultat produit est en adéquation avec la démarche : • Cohérence entre prédiction et commande (900 > résultats calculés).	1 pt	
CP : (Critère de Perfectionnement)	**- Présentation** • Bien lisible et sans ratures	0,25 pt	**0,5 pt**
	- Concision Absence de redites et réponse directe sans superflu.	0,25 pt	

Consigne 2 : Rentabilité de la production **(6,75 points)**

Critères minimaux (CM)	Indicateurs	Barème	Total
CM1 : Pertinence	**-Des outils mathématiques en rapport avec le contexte sont utilisés :** • Suite géométrique pour modéliser une hausse annuelle de 5%.	0,5 pt	**1 pt**

Proposition de grille de correction de la situation d'intégration

NB : en vue de faciliter l'attribution des notes par le correcteur, la situation d'intégration a été noté sur 20 points. Les notes obtenues sur 20 seront divisées par 4 pour la note de la situation d'intégration sur 5 points.

Consigne 1 : Détermination de la satisfaction de la commande **(6,75 points)**

Critères minimaux (CM)	Indicateurs	Barème	Total
CM1 : Pertinence	**-Des outils mathématiques en rapport avec le contexte sont utilisés :** • Méthode de Mayer ou moindres carrés appliquées à des données de production.	0,5 pt	**1 pt**
	-Les outils mathématiques utilisés sont adéquats : • Chois d'un ajustement linéaire	0,5 pt	
CM2 : Utilisation correcte des outils mathématiques en situation	**-Respect des étapes dans l'utilisation de l'outil :** • Calcul de a et b • Substitution de x=7, • Comparaison avec 900.	0 ,25 pt 0,25 pt 0,25 pt	**2,75 pts**
	-Justesse de l'argumentation (argumentation, calculs) : • Calcul de $a = \frac{340-175}{3,5-1,5} = 82,5$ • Calcul de $b = 51,25$	0,5 pt 0,5 pt	
	-Exactitude des formules (Formules, propriétés) : • Équations correctes ($y = 82.5x + 51.25$ ou $y = 79x + 60$).	1 pt	
CM3 : Cohérence de la réponse	**-Qualité des enchaînements des étapes de la démarche :** • Passage des calculs à la conclusion (900 > 629) ou (900 > 613).	0,5 pt	**2,5 pts**
	-Le résultat produit est conforme au produit attendu : • Conclusion claire : Le groupement ne sera pas en mesure de satisfaire la commande.	1 pt	

Critères minimaux (CM)	Indicateurs	Barème	Total
CM1 : Pertinence	**-Des outils mathématiques en rapport avec le contexte sont utilisés :** • Équation cartésienne et identification de conique.	0,5 pt	**1 pt**
	-Les outils mathématiques utilisés sont adéquats : • Reconnaissance d'une ellipse par transformation de l'expression	0,5 pt	
CM2 : Utilisation correcte des outils mathématiques en situation	**-Respect des étapes dans l'utilisation de l'outil :** • Réécriture de $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 25$ sous la forme $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$.	0,5 pt	**2,5 pts**
	-Justesse de l'argumentation (argumentation, calculs) : • Transformation correcte de $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 25$ sous la forme $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$.	1 pt	
	-Exactitude des formules (Formules, propriétés) : Paramètres a=10 et b=5 exacts.	0,5 pt 0,5 pt	
CM3 : Cohérence de la réponse	**-Qualité des enchaînements des étapes de la démarche :** • Transformation claire permettant la conclusion : la forme du terrain est elliptique.	0,5 pt	**2,5 pts**
	-Le résultat produit est conforme au produit attendu : • Réponse attendue : la forme du terrain est elliptique.	1 pt	
	-Le résultat produit est en adéquation avec la démarche :	1 pt	

Critères minimaux (CM)	Indicateurs	Barème	Total
	-Les outils mathématiques utilisés sont adéquats : • Expression de u_n en fonction de n : $u_n = 4500 \times (1{,}05)^{n-1}$	0,5 pt	
CM2 : Utilisation correcte des outils mathématiques en situation	**-Respect des étapes dans l'utilisation de l'outil :** • Utilisation du logarithme pour transformer : $u_n \geq 7000$	0,75 pt	**2,75 pts**
	-Justesse de l'argumentation (argumentation, calculs) : • Résolution exacte de : $(1{,}05)^{n-1} \geq \frac{14}{9}$	1 pt	
	-Exactitude des formules (Formules, propriétés) : • Formule de suite géométrique correctement appliquée.	1 pt	
CM3 : Cohérence de la réponse	**-Qualité des enchaînements des étapes de la démarche** : Transition logique de la suite à l'année : 2030.	0 ,5 pt	**2,5 pts**
	-Le résultat produit est conforme au produit attendu : • La 11ème année : 2030 correspond au résultat attendu.	1 pt	
	-Le résultat produit est en adéquation avec la démarche : • Conformité entre calculs et conclusion.	1 pt	
CP : (Critère de Perfectionnement)	**- Présentation** • Bien lisible et sans ratures	0,25 pt	**0,5 pt**
	- Concision Absence de redites et réponse directe sans superflu.	0,25 pt	

Consigne 3 : Forme du terrain **(6,5 points)**

Critères minimaux (CM)	Indicateurs	Barème	Total
	• Équation et conclusion cohérentes.		
CP : (Critère de Perfectionnement)	**- Présentation** • Bien lisible et sans ratures	0,25 pt	**0.5 pt**
	- Concision Absence de redites et réponse directe sans superflu.	0,25 pt	