BAC Pro industriel

Sujet 3.

Proposition de corrigé

Exercice (8 points)

1) Donnons la solution générale de l'équation différentielle (E) : $y'' + 25y = 0$

La forme générale de la solution de l'équation différentielle (E) est

$f(x) = A\cos 5x + B\sin 5x$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. (2pts)

2) Déterminons la fonction f solution de l'équation (E) vérifiant $\begin{cases} f(0) = \sqrt{3} \\ f'(\frac{\pi}{5}) = -5 \end{cases}$

On a $f(0) = \sqrt{3} \Rightarrow A\cos 0 + B\sin 0 = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \boxed{A = \sqrt{3}}$ (1pt)

$f'(x) = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x$

$f'(\frac{\pi}{5}) = -5A\sin\pi + 5B\cos\pi$

$f'(\frac{\pi}{5}) = -5 \Leftrightarrow -5B = -5$

$\Leftrightarrow \boxed{B = 1}$ (1pt)

$\boxed{f(x) = \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x}$ (1pt)

3) Vérifions que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = 2\cos(5x - \frac{\pi}{6})$

On a : $2\cos(5x-\frac{\pi}{6}) = 2[\cos(5x).\cos\frac{\pi}{6} + \sin(5x).\sin\frac{\pi}{6}]$

$= 2[\cos(5x)\times(\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{1}{2}\sin 5x]$

$= 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + 2\times\frac{1}{2}\sin 5x$

$= \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x$

d'où $f(x) = 2\cos(5x-\frac{\pi}{6})$ (2pts)

4) Montrons que la fonction g définie par $g(x) = 2\sin(5x+\frac{\pi}{3})$ est une solution de l'équation (E).

On a : $g(x) = 2(\sin 5x\cos\frac{\pi}{3} + \cos 5x\sin\frac{\pi}{3})$

$= 2(\frac{1}{2}\sin 5x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x)$

$= \sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = f(x)$ d'où g est une solution de l'équation (E). (1 pt)

Problème (12 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ de représentation graphique (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité 1 cm.

1 – Déterminons l'ensemble de définition D_f de f.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 2 \neq 0\}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ (0,5 pt)

2 – a.) Calculons les limites de f en 2^- et en 2^+

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} \right) = -\infty$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 4x + 5) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (x - 2) = 0 \text{ et} \\ x - 2 < 0, \forall x < 2 \end{cases}$

d'où $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ (0,5 pt)

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} \right) = +\infty$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 4x + 5) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x - 2) = 0 \text{ et} \\ x - 2 > 0, \forall x > 2 \end{cases}$

d'où $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ (0,5pt)

b) Déduisons en que la courbe (C_f) admet une asymptote dont on précisera la nature et l'équation.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

alors la courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$. (1pt)

c) Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (0,5pt)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (0,5pt)

3. a) Montrons que pour tout $x \in D_f$

$f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x-2}$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+5}{x-2} = \frac{x^2-4x+4+1}{x-2} = \frac{(x-2)^2+1}{x-2}$$

$$= \frac{(x-2)^2}{x-2} + \frac{1}{x-2} = (x-2) + \frac{1}{x-2} \text{ d'où}$$

$$f(x) = x-2 + \frac{1}{x-2} \quad (0{,}5\,pt)$$

b) Justifions que pour tout $x \in D_f$ la droite (Δ) d'équation $y = x-2$ est une asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2} = 0 \; (0{,}5\,pt)$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0 \; (0{,}5\,pt)$$

On a : $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y] = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = 0$

donc pour tout $x \in D_f$, la droite (Δ) d'équation $y = x-2$ est une asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$ $(0{,}5\,pt)$

c) Etudions la position relative de la droite (Δ) par rapport à la courbe (C_f).

$$\forall x \in D_f, \; [f(x) - y] = \frac{1}{x-2}$$

Le signe de $[f(x) - y]$ est celui de $x-2$ car $1 > 0$

$\forall x \in]-\infty, 2[$, $[f(x) - y] < 0$ donc la droite (Δ) est au-dessus de la courbe (C_f). (0,5 pt)

$\forall x \in]2, +\infty[$, $[f(x) - y] > 0$ donc la droite (Δ) est en-dessous de la courbe (C_f) (0,5 pt)

4) a) Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-4x+5}{x-2}\right)' = \frac{(2x-4)(x-2)-(x^2-4x+5)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2-4x-4x+8-x^2+4x-5}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

donc $f'(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$ (0,5 pt)

Montrons que $f'(x) = \dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$

$$f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2-1}{(x-2)^2} = \frac{(x-2-1)(x-2+1)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$$

d'où $f'(x) = \dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$ (0,5 pt)

b) Etudions le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$ et et déduisons son sens de variation

$\forall x \in D_f$, $(x-2)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-3)(x-1)$.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$	$\|\|$	$-$		$+$	

. $\forall x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $]-\infty; 1]$ et sur $[3; +\infty[$. (0,75pt)

. $\forall x \in [1; 2[\cup]2; 3]$, $f'(x) \leq 0$, donc f est décroissante sur $[1; 2[$ et sur $]2; 3]$. (0,75 pt)

c) Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

5) Construction de la courbe (C_f) (1pt) et de la droite (Δ).

Confère représentation graphique

6) Calculons $\int_3^4 [f(x)-(x-2)]\,dx$

$$f(x)-(x-2) = \frac{1}{x-2}$$

$$\int_3^4 [f(x)-(x-2)]\,dx = \int_3^4 \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= \Big[\ln|x-2|\Big]_3^4$$

$$= \ln 2 - \ln 1$$

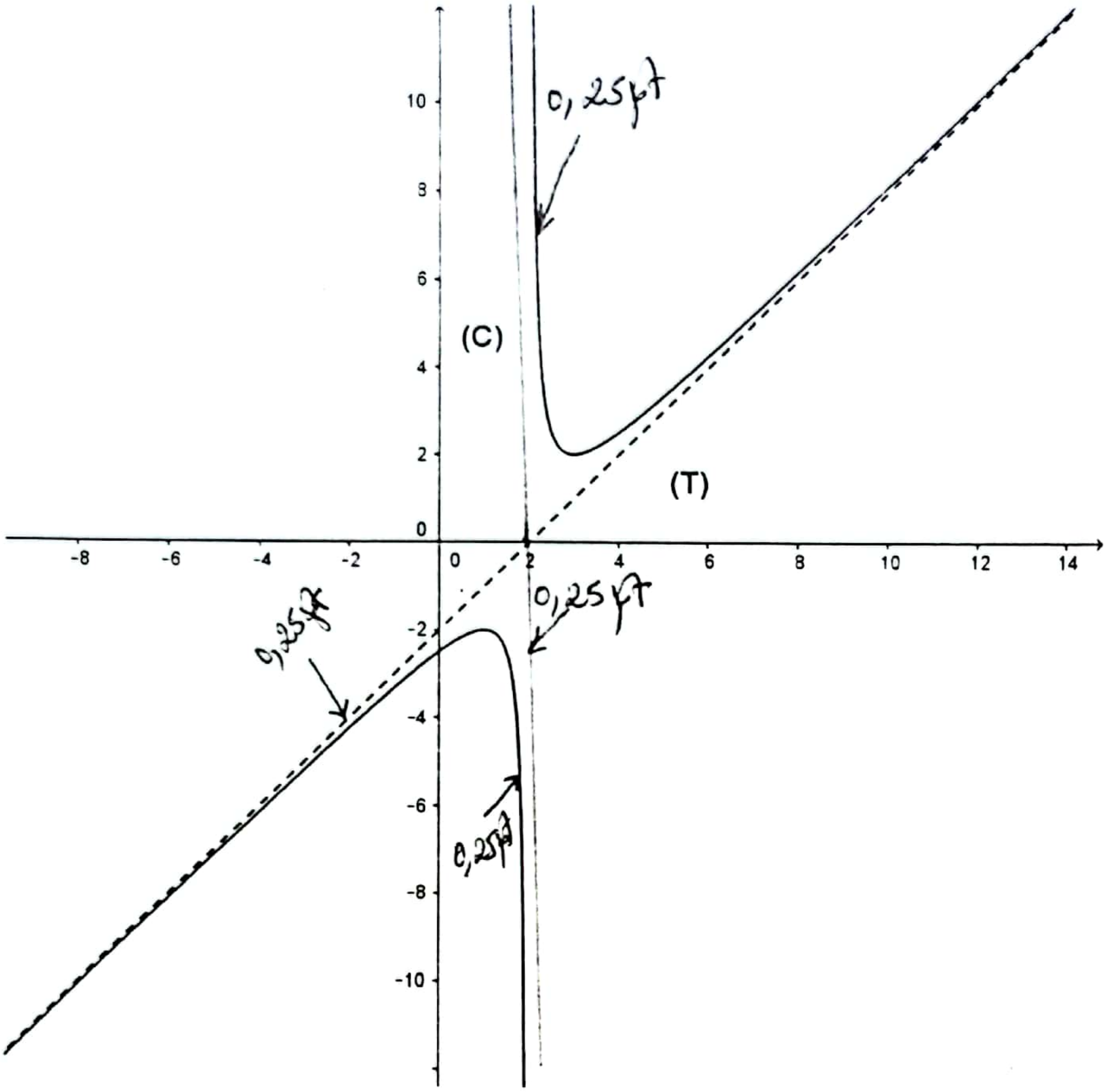
$$\int_3^4 [f(x)-(x-2)]\,dx = \ln 2 \quad (0{,}5\,pt)$$

Interprétons géométriquement le résultat obtenu.

$\int_3^4 [f(x)-(x-2)]\,dx = \ln 2$ est l'aire en unité d'aire du domaine du plan limité par la courbe (C_f), la droite (Δ) et les droites d'équations $x=3$ et $x=4$ $(0{,}5\,pt)$

Scanné avec CamScanner

5)



respect de l'unité graphique

6) $$\int_3^4 \left[f(x) - (x-2)\right] dx = \int_3^4 \frac{1}{x-2}\, dx$$

$$= \left[\ln(x-2)\right]_3^4 \quad 0,25pt$$

$$0,25pt \quad = \ln 2$$ est l'aire

en unité d'aire du domaine du plan limité par la courbe (C_f) ; (Δ) et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 4$ 0,5pt