Proposition de corrigé Exercice 1

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2^{-2n+1}$.

1) a) Montrons que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2^{-2(n+1)+1} = 2^{-2} \times 2^{-2n+1} \\ &= \frac{1}{4}u_n \end{aligned}$$

(0,5 pt)

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$. ~~1 pt~~ (0,5 pt)

b) Calculons la limite de la suite (u_n).

$$\text{comme } 0 < q < 1 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

0,5 pt

2) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{\ln(u_n)}{\ln 2}$.

Montrons que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{\ln(2^{-2n+1})}{\ln 2} = \frac{(-2n+1)\ln 2}{\ln 2} \\ v_n &= -2n+1. \end{aligned}$$

0,5 pt

(v_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = -2$.

3) On note S_n la somme

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$$

et P_n le produit

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$$

a) Exprimons S_n en fonction de n.

$$\begin{aligned} S_n &= n \times \frac{v_0 + v_{n-1}}{2} \\ &= n \times \frac{1 + -2(n-1) + 1}{2} \\ &= n(-n+2) \end{aligned}$$

(0,5 pt)

Déduisons-en l'expression de P_n en fonction de n.

Remarquons que $u_n = 2^{v_n}$; alors

$$\begin{aligned} P_n &= 2^{v_0} \times 2^{v_1} \times \cdots \times 2^{v_{n-1}} \\ &= 2^{v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}} \\ &= 2^{S_n} \\ P_n &= 2^{-n^2+2n} \end{aligned}$$

(0,5 pt

b)Résolvons dans $\mathbb{N}$, l'équation $S_n = -24$ puis l'inéquation $S_n > -24$.

$$\begin{aligned}\star S_n &= -24 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 24 = 0\\ &\Leftrightarrow n = -4(\text{ ne convient pas}) \text{ ou } n = 6\\ S_{\mathbb{N}} &= \{6\}\end{aligned}$$

(0,25 pt)

$$\begin{aligned}\star S_n &> -24 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 24 < 0\\ &\Leftrightarrow n \in]0;6[\cap \mathbb{N}\\ S_{\mathbb{N}} &= \{1;2;3;4;5\}\end{aligned}$$

(0,75 pt)

Proposition de corrigé

Exercice 2 (Espace)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points $A\left(0;-\frac{1}{2};0\right)$, $B\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ et $C\left(0;\frac{1}{2};0\right)$.

1) Déterminons les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ alors $\begin{cases}x_C-x_D=\frac{1}{2}\\y_C-y_D=\frac{1}{2}\\z_C-z_D=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}x_D=-\frac{1}{2}\\y_D=0\\z_D=0\end{cases}$.

Par suite $D\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$. (0,5 pt)

2) a) Comparons les distances AB et AD.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ alors

$$AB^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$
$$AD^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

Donc AB=AD. (0,5 pt)

b) Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$ 0,1

~~c)~~ ABCD est un parralélogramme qui a deux côtés consécutifs egaux et perpendiculaires alors ABCD est un carré.

Son aire est $A=AB^2=\frac{1}{2}$. ~~0,5~~ 0,5 pt

3) On considère le point $S(0;0;2)$.

a) Calculons la distance d du point S au plan (ABC).

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{AS}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}$ et

$\overrightarrow{AS}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=1$. Donc $d=2$. 1,5

b) Déduisons-en le volume V de la pyramide SABCD. 0,1

3/8

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} aire(ABCD) \times d \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \\
V &= \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

0,5 pt

4/8

Proposition de corrigé

Problème

Partie A 2 pts

On considère la fonction g définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x) = x(x+1) + \ln(x+1)$

1) a) Calculons $g'(x)$ puis étudier son signe.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x + 1 + \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{2x^2 + 3x + 2}{x+1} \end{aligned}$$ 0,5

Le discrimant de $2x^2 + 3x + 2$ est strictement négatif et le coefficient de x^2 est $2 > 0$ alors $2x^2 + 3x + 2 > 0$. De plus $x + 1 > 0$ pour tout x de $]-1;+\infty[$. Alors

$$g'(x) > 0, \forall x \in]-1;+\infty[.$$ 0,5

b) On en déduit que g est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ 0,5

2) Calulons $g(0)$ et déduisons-en le signe $g(x)$ pour $x > -1$

$g(0) = 0.$ 0,5

$$x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0) = 0$$

Alors

$$g(x) \geq 0, \forall x \in [0;+\infty[\text{ et } g(x) \leq 0, \forall x \in]-1;0]$$ 0,5

Partite B 7,75

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \ln^2(x+1)$. Solution: On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x^2 = 1 \text{ et } \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \ln^2(x+1) = +\infty \quad \text{alors } \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty$$ 0,5

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \ln^2(x+1) = +\infty \quad \text{alors } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$ 0,5

b) Calculons $f'(x)$ pour tout réel $x > -1$ puis vérifions que $f'(x) = 2\frac{g(x)}{x+1}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2\frac{1}{x+1}\ln(x+1) \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 2\ln(x+1)}{x+1} \end{aligned}$$ 0,5

$$f'(x) = 2\frac{g(x)}{x+1}$$ 0,5

c) Variations de f son tableau de variation.

$f'(x)$ es du signe de $g(x)$ alors

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in [0;+\infty[\text{ et } f'(x) \leq 0, \forall x \in]-1;0].$$ 0,5

5/8

Donc f est décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$. 0,25

Tableau de variation

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

0,5

2) Montrons que la restriction h de f à $]-1;0]$ est une bijection de $]-1;0]$ sur un intervalle J à préciser.

h est continue et strictement décroissante sur $]-1;0]$ alors h est une bijectiob de $]-1;0]$ sur $J = h\left(]-1;0]\right) = [0;+\infty[$. 1

3) Soit u la fonction définie sur $]-1;0]$ par $u(x) = h(x) - x$.

a) Etudions les variations de u puis dresser son tableau de variation.

$$\begin{aligned} u'(x) &= h'(x) - 1 \\ &= g(x) - 1 \end{aligned}$$

0,5 0,25

$g(x) \leq 0$, $\forall x \in]-1;0]$ alors $u(x) \leq 0$, $\forall x \in]-1;0]$. donc u est décroissante sur $]-1;0]$. 0,25

Tableau de variation

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} x^2 - x = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \ln^2(x+1) = +\infty$ alors $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} u(x) = +\infty$ 0,25

x	-1		0
$u'(x)$		$-$	
u	$+\infty$	$\searrow$	0

0,5

b) En déduire qu'il existe un unique réel α de $]-1;0]$ tel que $h(\alpha) = \alpha + 1$

u est une bijection de $]-1;0]$ sur $u\left(]-1;0]\right) = [0;+\infty[$ qui contient 1; alors l'équation $u(x) = 1$ admet une unique solution dans $]-1;0]$. D'où l'existence d'un unique réel α dans $]-1;0]$ vérifiant $u(\alpha) = 1$ c'est à dire $h(\alpha) = \alpha + 1$. 1,75

4) a) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{\ln^2(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x} \right)$$ 0,75

6/8

or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln^2(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}\right)^2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln^2(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}\right) = 0$. De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$. En définitive, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. 0,5 pt

On en déduit que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

b) Tracer dans le même orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ les courbes (C) et (Γ). 1,5

Partie C 1,75

On désigne par A l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$.

1) Vérifions que la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x + (x+1)\left(\ln^2(x+1) - 2\ln(x+1)\right)$ est une primitive sur $]-1; +\infty[$ de la fonction f.

F est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et on a

$$\begin{aligned}
F'(x) &= x^2 + 2 + \ln^2(x+1) - 2\ln(x+1) + (x+1)\left(\frac{2\ln(x+1)}{x+1} - \frac{2}{x+1}\right) \\
&= x^2 + 2 + \ln^2(x+1) - 2\ln(x+1) + 2\ln(x+1) - 2 \\
&= x^2 + \ln^2(x+1) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

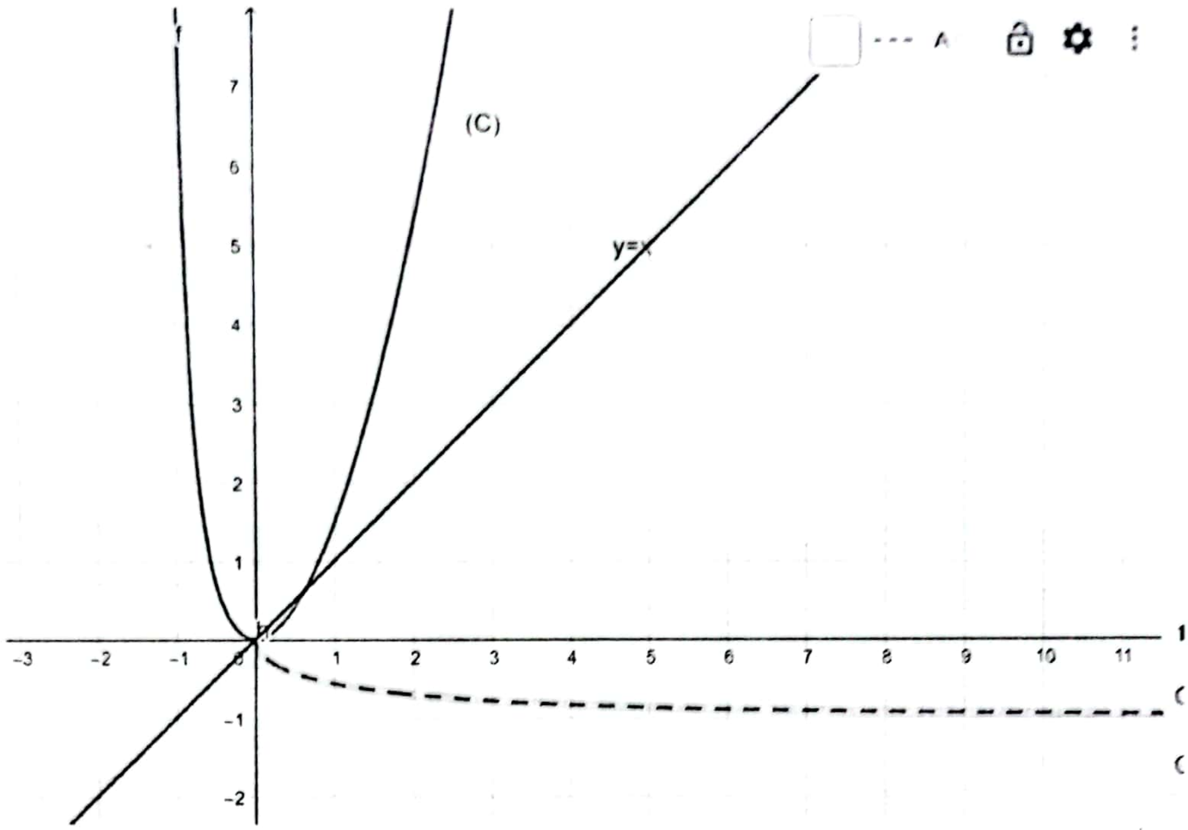
1

alors F est une primitive sur $]-1; +\infty[$ de la fonction f.

2) Calculons alors l'aire A.

$$\begin{aligned}
A &= \int_\alpha^0 f(x)\,dx \\
&= [F(x)]_\alpha^0 \\
&= -F(\alpha) \\
A &= -\frac{1}{3}\alpha^3 - 2\alpha - (\alpha+1)\left(\ln^2(\alpha+1) - 2\ln(\alpha+1)\right)
\end{aligned}$$

0,75



Série F sujet 5

$$f(x) = x^2 + ln^2(x+1)$$

8/8