Bac D 2010 session normale

EXERCICE 1

Partie A

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0$

1. Déterminer les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$

3.a. Développer, réduire et ordonner $(2z + 1)\left[2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4\right]$

b. En déduire les solutions de (E).

4. Soit $z_0 = -\dfrac{1}{2}$; $z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

Exprimer chacun des nombres complexes z_0, z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Partie B

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ où l'unité est 1 cm, on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives $-\dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $1 + \sqrt{3}i$

S est la similitude directe de centre O, d'angle $-\dfrac{\Pi}{3}$ et de rapport 2.

1.a. Déterminer l'écriture complexe de S.

b. Justifier que $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$

2. Soit M_n un point du plan d'affixe z_n.

On pose pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = S(M_n)$

Justifier que $z_{n+1} = (1 - \sqrt{3}i)z_n$ où z_{n+1} est l'affixe de M_{n+1}

3. On considère la suite U_n définie pour tout entier naturel n par $U_n = |z_n|$

a. Démontrer que U_n est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b. Justifier que la distance $OM_{12} = 2048$

EXERCICE 2

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé.
Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.
Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8.
On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.

1. Calculer la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.
2. Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.
3. On soumet au test un individu pris au hasard.

Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie?

4. On contrôle 5 individus au hasard.

a. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé?

b. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé?

5. On contrôle n individus pris au hasard. (n est un entier naturel non nul).
Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieure à 0,98.

PROBLEME

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par $g(x) = 1 + x\ln x$

1.a. Justifier que $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[\quad g'(x) = 1 + \ln x$.

b. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. (On ne calculera pas les limites de g).

2. En déduire que $\forall x \in\,]0\,;+\infty[,\ g(x) > 0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{1 + x\ln x} \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I,J) *(Unité:4cm)*.

1.a. Etudier la continuité de f en O.

b. Etudier la dérivabilité de f en O.

c. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est $y = x$.

d. Démontrer que :

(C) est au dessus de (T) sur $]0\,;1[$.

(C) est au dessous de (T) sur $]1\,;+\infty[$

2. Démontrer que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

3.a. On suppose que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Démontrer que $\forall x \in\,]0\,;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1-x}{(1 + x\ln x)^2}$

b. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

4. Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).

Partie C

1.a. Justifier que : $\forall x \in\,]0\,;+\infty[,\ f(x) \leq 1$.

b. Démontrer que : $\forall x \in [1\,;e],\ 1 - \dfrac{1}{1+x} \leq f(x)$

2. Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Démontrer que : $16(e-1) + 16\ln(\dfrac{2}{1+e}) \leq A \leq 16(e-1)$.