REPUBLIQUE DU NIGER MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION TECHNOLOGIQUE *OFFICE DU BACCALAUREAT, DES EQUIVALENCES ET DES EXAMENS ET CONCOURS DU SUPERIEUR (OBEECS)*	BACCALAUREAT SESSION 2025 SERIE/FILIERE : C, E	EPREUVE : Mathématiques DUREE : 4H COEFFICIENT : 6 GROUPE : 1er groupe

Exercice 1 (*4 points*)

Soit $M = \{1 ; j ; j^2\}$ l'ensemble des racines cubiques de 1 dans $\mathbb{C}$ avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et a et b deux nombres complexes fixés.

1) A l'aide de deux tableaux à double entrée avec λ en colonne et μ en ligne montrer que $\lambda^2\mu$ et $\lambda\mu^2$ prennent exactement 3 valeurs différentes lorsque $(\lambda ; \mu)$ décrit $M \times M$ **(1 point)**
2) Soit Δ l'ensemble des nombres complexes $(\lambda a + \mu b)^3$ quand $(\lambda ; \mu)$ décrit $M \times M$. Démontrer que Δ comporte au plus trois éléments. **(1point)**
3) a) Vérifier que $(a + b)^3$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E): $(z - a^3 - b^3)^3 - 27\, a^3 b^3 z = 0$. **(0.5 point)**

   b) Prouver que tous les autres éléments de Δ sont solutions de (E). **(0.5 point)**
4) On pose $a^3 = 2 + 2i$ et $b^3 = 8i$. Déterminer une solution particulière de l'équation $(E_1) : (z - 2 - 10i)^3 + 432(1 - i)z = 0$; puis en utilisant ce qui précède déduire les deux autres solutions de (E_1). **(1 point)**

Exercice 2 (*5 points*)

Soit P le plan affine rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. Soit α, β deux réels et $f_{(\alpha,\beta)}$ l'application de P qui à tout point $M\binom{x}{y}$ associe le point $M'\binom{x'}{y'}$ telle que : $\begin{cases} x' = 3x + \alpha \\ y' = -3y + \beta \end{cases}$
   a) Démontrer que $f_{(\alpha,\beta)}$ admet un seul point invariant Ω. **(0.5 point)**
   b) Montrer que $f_{(\alpha,\beta)} = S \circ h$ où S est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses et h une homothétie dont on déterminera le rapport et le centre. **(1 point)**
2. On prend $(\alpha, \beta) = (6; 12)$ et $f = f_{(6,12)}$
   a) Définir l'application réciproque f^{-1}. **(0.5 point)**
   b) On définit la suite des points M_n par : $\begin{cases} M_1 = O \\ M_{n+1} = f^{-1}(M_n) \end{cases}$, pour tout $n \geq 1$
      (i) Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} les coordonnées de M_{n+1} en fonction de x_n et y_n les coordonnées de M_n. **(0.5 point)**

(ii) Déterminer les réels a et b tels que les suites définies par $u_n = x_n - a$ et $v_n = y_n - b$ soient des suites géométriques dont on précisera pour chacune sa raison et son premier terme. **(1 point)**

(iii) En déduire les termes généraux x_n et y_n en fonction de n. **(0.5 point)**

(iv) Calculer les limites de x_n et y_n quand n tend vers $+\infty$. **(0.5 point)**

(v) Justifier que la suite des points M_n converge vers une position limite. **(0.5 point)**

Problème (*11 points*)

On considère la fonction f_1 définie sur $[0\,;+\infty[$, $f_1(x) = xe^{-x^2}$ et on appelle (C_1) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique 4 cm.

Partie A

1. Etudier les variations de f_1. **(1 point)**
2. Calculer la limite de f_1 en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat. **(0.25 + 0.25 point)**
3. Dresser le tableau de variation de f_1. **(0.5 point)**
4. On appelle (Δ) la droite d'équation $y = x$; déterminer la position de (C_1) par rapport à (Δ). **(0.75 point)**
5. Tracer (C_1) et (Δ). **(1 point)**

Partie B

On considère la fonction f_3 définie sur $[0\,;+\infty[$ $f_3(x) = x^3e^{-x^2}$ et on appelle (C_3) sa courbe representative.

1. Montrer que pour tout x positif $f_3'(x)$ a le même signe que $3 - 2x^2$. **(0.5 point)**
   En déduire le sens de variation de f_3. **(0.5 point)**
2. Calculer la limite de f_3 en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat. **(0.5 point)**
3. Déterminer la position relative de (C_1) et (C_3). **(0.75 point)**
4. Tracer (C_3) dans le même repère que (C_1). **(0.5 point)**

Partie C

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = x^ne^{-x^2}$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$; f_n admet un maximum en $b_n = \sqrt{\frac{n}{2}}$. On note α_n ce maximum. **(0.5 point)**
2. On appelle S_n le point de (C_n) d'abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$. Montrer que, pour tout n, (C_n) passe par S_2. Placer S_1, S_2 et S_3 sur la même figure. **(0.5 + 0.5 point)**
3. Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^{\frac{x}{2}\left[-1+\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]}$
   a) Etudier le sens de variation de g. **(1 point)**
   b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$. **(1 point)**
   c) En déduire que l'ordonnée de S_n est supérieure ou égale à celle de S_2. **(1 point)**