EXAMEN DU BACCALAUREAT Série D

Proposition de corrigé du sujet n°: 01

Exercice 1 : (4 pts)

$P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 - 2z - 8 + 4i$

1) a) Calculons $p(2i)$

$p(2i) = (2i)^3 - (2+2i)(2i)^2 - 2(2i) - 8 + 4i$

$= -8i + 8 + 8i - 4i - 8 + 4i$

$p(2i) = 0$ 0,25 pt

Déterminons les nombres complexes a et b

On a : $p(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$

$p(z) = z^3 + az^2 + bz - 2iz^2 - 2aiz - 2bi$

$p(z) = z^3 + (a-2i)z^2 + (b-2ai)z - 2bi$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a - 2i = -2 - 2i \\ b - 2ai = -2 \\ -2bi = -8 + 4i \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 - 4i \end{cases}$$ 0,5 pt

D'où $p(z) = (z-2i)(z^2 - 2z - 2 - 4i)$

b) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$

$p(z) = 0 \iff (z-2i)(z^2 - 2z - 2 - 4i) = 0$

$\iff z = 2i$ ou $z^2 - 2z - 2 - 4i = 0$

Résolvons $z^2 - 2z - 2 - 4i = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(-2-4i) = 12 + 16i$

Posons $\delta^2 = \Delta$ avec $\delta = x + yi$; $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

$|\Delta| = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20$

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x^2 - y^2 = 12 \\ 2xy = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = 32 \\ y = \dfrac{8}{x} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -4 \text{ ou } x = 4 \\ y = \dfrac{8}{x} \end{cases}$$

Pour $x = -4$; $y = -2$

Pour $x = 4$; $y = 2$

D'où $\delta_1 = -4 - 2i$ et $\delta_2 = 4 + 2i$

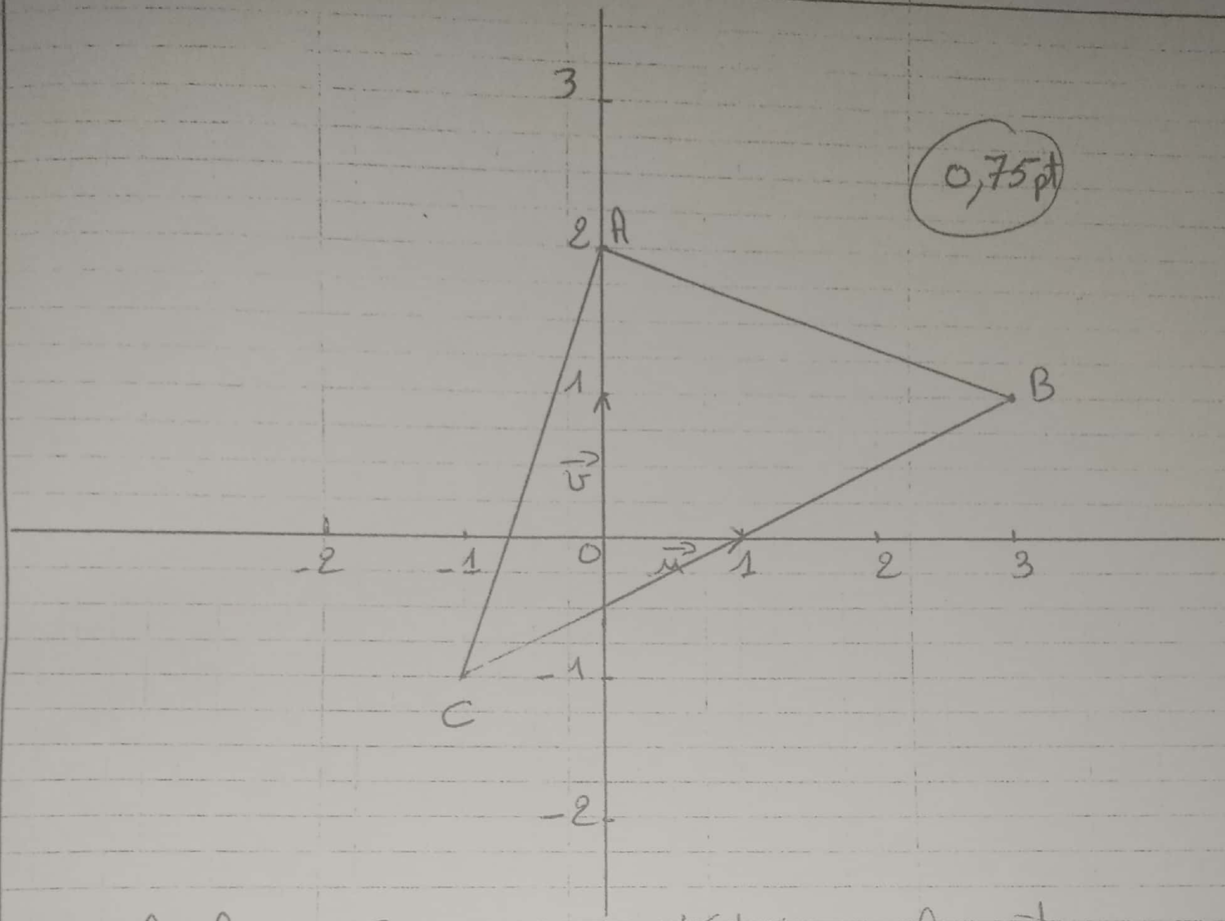
$$z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a} = \frac{2 - 4 - 2i}{2} = -1 - i$$

$$z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a} = \frac{2 + 4 + 2i}{2} = 3 + i$$

Donc $S_{\mathbb{C}} = \{2i \, ; -1 - i \, ; 3 + i\}$ 0,5 pt

2) a) Plaçons les points A, B et C.

$z_A = 2i$; $z_B = 3 + i$; $z_C = -1 - i$



0,75pt

b) Calculons $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ puis déduisons la nature exacte du triangle ABC.

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{3+i-2i}{-1-i-2i} = \frac{3-i}{-1-3i} = \frac{(3-i)(-1+3i)}{1+9} = \frac{10i}{10} = i$$ 0,25pt

On a : $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = i$ donc ABC est un triangle rectangle en A

On a : $\left|\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right| = |i| \iff \frac{AB}{AC} = 1 \iff AB = AC$ donc ABC est un triangle isocèle en A

En conclusion, ABC est un triangle rectangle isocèle en A. (0,5 pt)

3) Montrons que pour tout $z \neq 3+i$; $f(z) = (1-i) \cdot \frac{z+1+i}{z-3-i}$

On a : $f(z) = \frac{(1-i)z+2}{z-3-i}$

$$= \frac{(1-i)\left(z+\frac{2}{1-i}\right)}{z-3-i}$$

$$= \frac{(1-i)\left(z+\frac{2(1+i)}{2}\right)}{z-3-i}$$

$$f(z) = (1-i) \cdot \frac{z+1+i}{z-3-i}$$

Donc $\forall z \neq 3+i$; $f(z) = (1-i) \cdot \frac{z+1+i}{z-3-i}$ (0,25)

4) Déterminons :

a) L'ensemble (E) des points M d'affixe z telle que $|f(z)| = \sqrt{2}$

On a : $|f(z)| = \sqrt{2} \iff \left|(1-i) \cdot \frac{z+1+i}{z-3-i}\right| = \sqrt{2}$

$$\iff |1-i| \left|\frac{z+1+i}{z-3-i}\right| = \sqrt{2}$$

$$\iff \sqrt{2} \left|\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}\right| = \sqrt{2}$$

$$\iff |z_M - z_C| = |z_M - z_B|$$

$$\iff CM = BM$$

Donc l'ensemble (E) est la médiatrice de [BC] (0,25 pt)

b) L'ensemble (F) des points M d'affixe z tel que $\arg(f(z)) = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

On a : $\arg(f(z)) = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \arg(1-i) + \arg\left(\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Calculons $\arg(1-i)$.

Soit α un argument de $1-i$.

$|1-i| = \sqrt{2}$; $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}$

$\arg(f(z)) = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + \arg\left(\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BM} ; \overrightarrow{CM}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BM} ; \overrightarrow{CM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Donc l'ensemble (F) est le cercle de diamètre [BC] privé des points B et C. 0,25 pt

c) L'ensemble (G) des points M d'affixe z tel que $|f(z) - (1-i)| = 2\sqrt{10}$.

On a : $|f(z) - (1-i)| = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow \left|(1-i)\frac{z+1+i}{z-3-i} - (1-i)\right| = 2\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \left|(1-i)\left(\frac{z+1+i-z+3+i}{z-3-i}\right)\right| = 2\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \left|(1-i)\left(\frac{2i+4}{z-3-i}\right)\right| = 2\sqrt{10}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{|1-i|\cdot|2i+4|}{|Z_M - Z_B|} = 2\sqrt{10}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{2\sqrt{10}}{|Z_M - Z_B|} = 2\sqrt{10}$

$\Longleftrightarrow |Z_M - Z_B| = 1$

$\Longleftrightarrow BM = 1$

Donc l'ensemble (G) est le cercle de centre B et de rayon 1.

0,5 pt

Exercice 2 : (4pts)

On a $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \ln(U_{n+1}) = 1 + \ln(U_n) \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrons que la suite (U_n) est géométrique de raison e.

On a : $\ln(U_{n+1}) = 1 + \ln(U_n)$

$\Longleftrightarrow \ln(U_{n+1}) = \ln e + \ln(U_n)$

$\Longleftrightarrow \ln(U_{n+1}) = \ln(e\,U_n)$

$\Longleftrightarrow e^{\ln(U_{n+1})} = e^{\ln(e \cdot U_n)}$

$\Longleftrightarrow U_{n+1} = e \cdot U_n$

0,5 pt

Donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = e$ et de premier terme $U_0 = 2$. (0,5 pt)

b) Exprimons U_n en fonction de n.

Comme (U_n) est géométrique alors $U_n = U_0 \cdot q^n$

Donc $U_n = 2e^n$ (0,5 pt)

2) Démontrons que la suite (U_n) est croissante

$U_n = 2e^n$

on a : $2 > 0$ et $e > 1$ donc

(U_n) est une suite strictement croissante (0,5 pt)

Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 2e^n = +\infty$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$

(0,5 pt)

3) Exprimons S_n en fonction de n.

Comme (U_n) est géométrique alors

$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$S_n = U_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$S_n = 2\left(\frac{1 - e^{n+1}}{1 - e}\right)$

$S_n = \frac{2 - 2e^{n+1}}{1 - e}$ (0,5 pt)

4) a) Montrons que $S'_n = n\ln 2 + \frac{n(n+1)}{2}$

On a: $S'_n = \ln(U_1) + \ln(U_2) + \dots + \ln(U_n)$

$S'_n = \ln(2e^1) + \ln(2e^2) + \dots + \ln(2e^n)$

$S'_n = \ln 2 + \ln e + \ln 2 + 2\ln e + \dots + \ln 2 + n\ln e$

$S'_n = n\ln 2 + (1 + 2 + \dots + n)$ or

$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(1+n)}{2}$

D'où $S'_n = n\ln 2 + \frac{n(1+n)}{2}$ 0,5pt

b) Déduisons le produit $P = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ en fonction de n.

On a: $S'_n = \ln(U_1) + \ln(U_2) + \dots + \ln(U_n)$

$S'_n = \ln(U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n)$

$e^{S'_n} = e^{\ln(U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n)}$

$e^{n\ln 2 + \frac{n(1+n)}{2}} = e^{\ln(U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n)}$

D'où $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n = e^{n\ln 2 + \frac{n(1+n)}{2}}$

0,5pt

Problème : (12 pts)

Partie A : (1,75 pts)

$\forall x \in]-\infty ; 0[\; ; \; h(x) = 2\ln(-x)$

1) Etudions les variations de h, puis dressons son tableau de variation.

. Calculons $h'(x)$

h est dérivable sur $]-\infty;0[$ et pour tout $x \in]-\infty;0[$;

$$h'(x) = 2\left(\frac{-1}{-x}\right) = \frac{2}{x}$$ (0,25 pt)

. Signe de $h'(x)$ et sens de variation de h.

$\forall x \in]-\infty;0[$; $x < 0$ et $h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$. (0,25 pt)

. Tableau de variation de h

. $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2\ln(-x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln x = +\infty \end{cases}$

. $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 2\ln(-x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$

x	$-\infty$		0
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

(0,5 pt)

2) Calculons $h(-1)$ et déduisons le signe de $h(x)$ sur $]-\infty;0[$

. Calculons $h(-1)$

$h(-1) = 2\ln 1 = 0$ (0,25pt)

. Signe de $h(x)$

h est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et $h(-1)=0$.

On en déduit que ; $h(x)>0$ pour tout $x\in]-\infty;-1[$

$h(x)<0$ pour tout $x\in]-1;0[$

(0,5pt)

Partie B : (8pts)

$$f(x)=\begin{cases}-2x+1+2x\ln|x| & ;\text{ si } x<0\\ (x+2)e^{-x}-1 & ;\text{ si } x\geq 0\end{cases}$$

1) Calculons ;

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -2x+1+2x\ln|x|$$

$$=\lim_{x\to-\infty} x\left(-2+\frac{1}{x}+2\ln|x|\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{car} \begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} -2+\frac{1}{x}=-2\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2\ln|x|=+\infty\end{cases}$$

(0,25pt)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x + 1 + 2x \ln|x|}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(-2 + \frac{1}{x} + 2 \ln|x| \right)$$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} -2 + \frac{1}{x} = -2 \\ \lim_{x \to -\infty} 2 \ln|x| = +\infty \end{cases}$

0,85pt

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[(x+2) e^{-x} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(x e^{-x} + 2 e^{-x} - 1 \right)$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$ car $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} x e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = 0 \end{cases}$

0,25pt

Interprétation graphique :

On a : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc

la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe (Oy) en $-\infty$. 0,25pt

On a : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$ donc la courbe $(\mathcal{C})$

admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ au voisinage de $+\infty$. 0,25pt

2) a) Etudions la continuité de f en 0.

$$f(0) = (0+2)e^0 - 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -2x + 1 + 2x\ln|x| = 1$$ car

0,25pt

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^-} -2x+1 = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} 2x\ln|x| = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+2)e^{-x} - 1 = 1$$ 0,25pt

car $\begin{cases} \lim_{x \to 0^+} x+2 = 2 \\ \lim_{x \to 0^+} e^{-x} = 1 \end{cases}$

Comme $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ alors

f est continue en 0. 0,25pt

b) Etudions la dérivabilité de f en 0.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \left(-2 + \frac{1}{x} + 2\ln|x| - \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$$ car $\lim_{x \to 0^-} 2\ln|x| = -\infty$

0,25pt

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x+2)e^{-x} - 1 - 1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{xe^{-x} + 2e^{-x} - 2}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(e^{-x} + \frac{2e^{-x} - 2}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(e^{-x} + 2\left(\frac{e^{-x} - 1}{x} \right) \right)$$

Posons $X = -x$; $x = -X$

quand $x \longrightarrow 0^+$; $X \longrightarrow 0^-$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{X \to 0^-} e^{X} - 2\left(\frac{e^{X} - 1}{X} \right) = -1$$ 0,25 pt

Comme $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$ alors f n'est pas dérivable en 0. 0,25 pt

. Déduisons les demi-tangentes à la courbe (C) au point $(0, 1)$

On a : $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$ donc la courbe (C) admet une demi-tangente verticale à gauche du point d'abscisse 0. 0,25 pt

On a : $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1$ donc la courbe (C) admet une demi-tangente à droite du point d'abscisse 0 de coefficient directeur -1 0,25 pt

3) a) Calculons la dérivée $f'(x)$.

. Sur $]-\infty;0[$

$f(x) = -2x+1+2x\ln|x| = -2x+1+2x\ln(-x)$

f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et pour tout $x \in]-\infty;0[$

$$f'(x) = (-2x+1+2x\ln(-x))'$$

$$= -2+2\left[\ln(-x)+x\left(\frac{-1}{-x}\right)\right]$$

$$= -2+2\ln(-x)+2$$

$f'(x) = 2\ln(-x)$ 0,25 pt

. Sur $]0;+\infty[$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$

$$f'(x) = [(x+2)e^{-x}-1]'$$

$$= e^{-x}-(x+2)e^{-x}$$

$$= e^{-x}(1-x-2)$$

$f'(x) = -(x+1)e^{-x}$ 0,25 pt

b) Exprimons $f'(x)$ en fonction de $h(x)$ pour $x \in]-\infty;0[$

Sur $]-\infty;0[$; $f'(x) = 2\ln(-x)$ or $2\ln(-x) = h(x)$

donc $f'(x) = h(x)$ 0,25 pt

c) Donnons le sens de variation de f

Comme $f'(x) = h(x)$ sur $]-\infty,0[$; on a

$\forall x \in]-\infty ; -1[$; $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty ; -1[$. 0,25pt

$\forall x \in]-1 ; 0[$; $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-1 ; 0[$. 0,25pt

On a : $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$; $\forall x > 0$

$\forall x \in]0 ; +\infty[$; $(x+1) > 0$; $e^{-x} > 0 \Rightarrow -(x+1)e^{-x} < 0$

$\Rightarrow f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$ 0,25pt

* Dressons le tableau de variation

$f(-1) = 2 + 1 - 2\ln|-1| = 3$

$f(0) = 1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$			0		$\|\|$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\searrow$	-1

0,5pt

4) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β tels que : $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ et $-4 < \beta < -3$.

. f est continue car dérivable et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0;+\infty[$ vers $f(]0;+\infty[) =]-1;1[$

Or $0 \in]-1,1[$; par conséquent, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$

Vérification :

$f(1) = (1+2)e^{-1} - 1 = 3 \times 0,36 - 1 = 0,08$

$f(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2}+2)e^{-\frac{3}{2}} - 1 = 3,5 \times 0,22 - 1 = -0,23$

$f(1) \times f(\frac{3}{2}) < 0$ donc $1 < \alpha < \frac{3}{2}$

0,5pt

. f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;-1[$. Elle réalise donc une bijection de $]-\infty;-1[$ vers $f(]-\infty;-1[) =]-\infty;3[$.

Or $0 \in]-\infty;3[$; par conséquent, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β sur $]-\infty;-1[$

Vérification :

. $f(-4) = 8+1-8\ln|-4| = 9-16\ln 2 = 9-16\times 0,69 = -2,04$

$f(-3) = 6-1-6\ln|-3| = 7-6\ln 3 = 7-6\times 1,1 = 0,4$

$f(-4)\times f(-3) < 0$ donc $-4 < \beta < -3$

0,5

En conclusion, l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions α et β tels que :

$1 < \alpha < \frac{3}{2}$ et $-4 < \beta < -3$

5) Construisons la courbe $(\mathcal{C})$, les demi-tangentes et l'asymptote. (Voir feuille annexe)

6) Calculons $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x).dx . cm^2$$

$$= \int_0^{\lambda} [(x+2)e^{-x} - 1] dx . cm^2$$

$$= \left(\int_0^{\lambda} (x+2)e^{-x}.dx - \int_0^{\lambda} 1 . dx\right) cm^2$$

Intégrons par parties $\int_0^{\lambda} (x+2)e^{-x}.dx$

Posons $\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \\ v(x) = x+2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$$\int_0^{\lambda} (x+2)e^{-x} . dx = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^{\lambda} - \int_0^{\lambda} -e^{-x}.dx$$

$$= \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^{\lambda} - \left[e^{-x}\right]_0^{\lambda}$$

$$= -(\lambda+2)e^{-\lambda} + 2 - e^{-\lambda} + 1$$

$$= (-\lambda-2-1)e^{-\lambda} + 3$$

$$\int_0^{\lambda} (x+2)e^{-x} = (-\lambda-3)e^{-\lambda} + 3$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left[(-\lambda-3)e^{-\lambda} + 3 - [x]_0^{\lambda}\right] cm^2$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left[(-\lambda-3)e^{-\lambda} - \lambda + 3\right] . cm^2$$ 0,5pt

b) Calculons $\lim_{\lambda \to 0} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \to 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} \left[(-\lambda-3)e^{-\lambda} - \lambda + 3 \right] = 0$$

(0,25pt)

$$\text{car} \begin{cases} \lim_{\lambda \to 0} (-\lambda-3)e^{-\lambda} = -3 \\ \lim_{\lambda \to 0} 3-\lambda = 3 \end{cases}$$

<u>Partie C :</u> (1,25 pts)

1) Montrons que g réalise une bijection de $I =]-\infty ; -1[$ vers un intervalle J que l'on précisera.

g étant la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; -1[$; g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; -1[$. Elle réalise donc une bijection de $]-\infty; -1[$ vers $f(]-\infty; -1[) =]-\infty; 3[$. D'où $J =]-\infty; 3[$

(0,5pt)

2) Dressons le tableau de variation de g^{-1}

g et g^{-1} ont le même sens de variation

g^{-1} : J vers I

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ 3
$(g^{-1})'(x)$	$+$
$g^{-1}(x)$	$-\infty \nearrow -1$

0,25pt

3) Construction de la courbe $(\mathscr{C}')$ de g^{-1} (voir feuille annexe)

$(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont symétrique par rapport à la première bissectrice $(y=x)$

0,25pt

Partie D : (1pt)

on a : $(\Gamma) : \begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = (2-\ln t)t - 1 \end{cases} \; ; t \geq 1$

1) Déterminons une équation cartésienne de (Γ)

$t \geq 1 \Rightarrow \ln t \geq \ln 1 \Rightarrow \ln t \geq 0 \Rightarrow x(t) \geq 0$

$x(t) = \ln t \Leftrightarrow t = e^{x(t)}$

$y(t) = (2 - \ln e^{x(t)}) \cdot e^{x(t)} - 1$

$y(t) = (2 - x(t)) \cdot e^{x(t)} - 1$

Donc l'équation cartésienne recherchée est :

$(\Gamma) : y = (2-x) \cdot e^{x} - 1$ avec $x \geq 0$

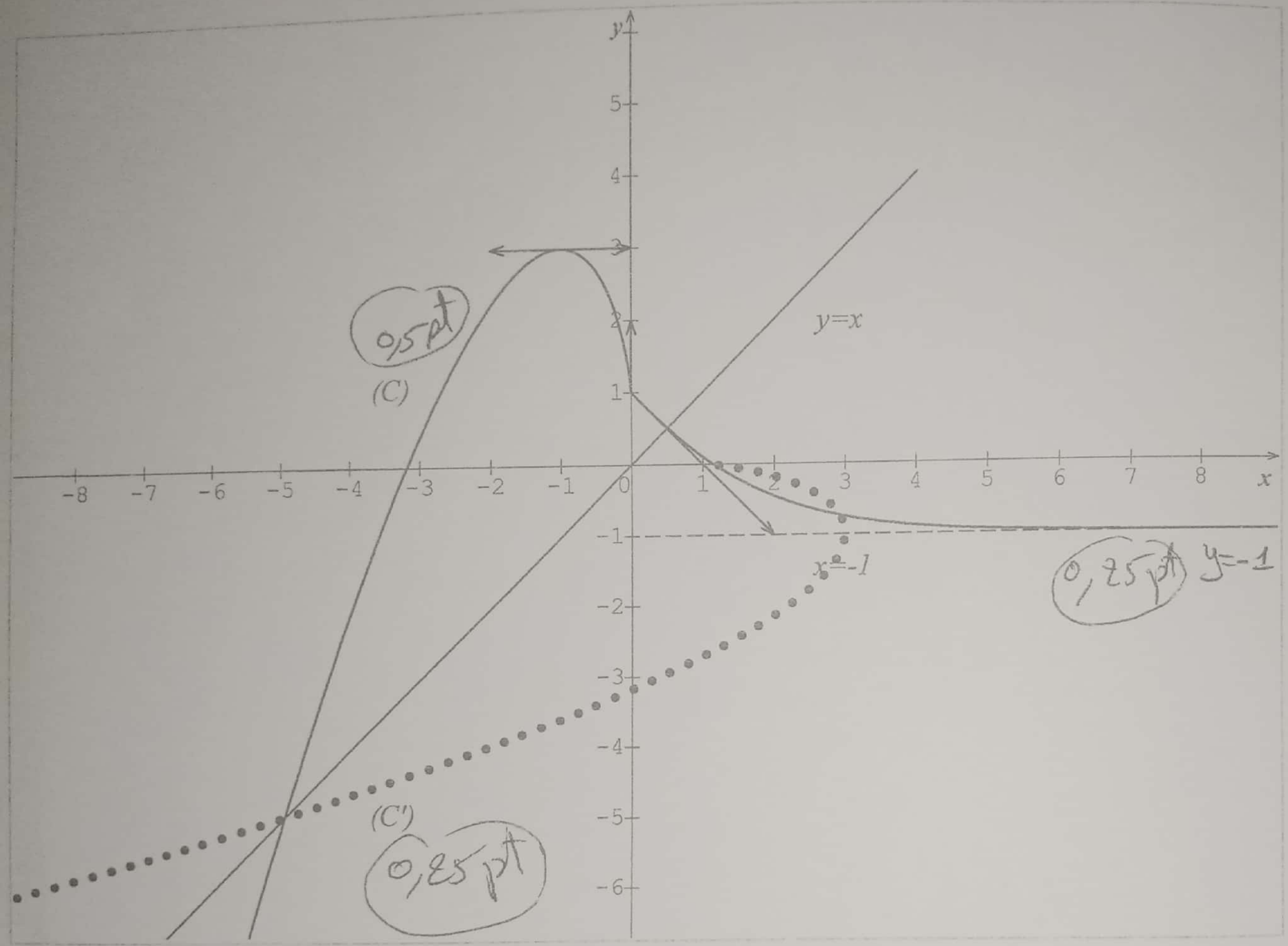
0,5pt

2) Déterminons les coordonnées de $\vec{V}$ en $t=e$

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{t} \\ y'(t) = 1 - \ln t \end{cases}$$

$$\vec{V}\begin{pmatrix} x'(e) \\ y'(e) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{V}\begin{pmatrix} \frac{1}{e} \\ 0 \end{pmatrix}$$

0,5pt



Feuille annexe

$\frac{21}{21}$