

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES
(Calculatrice non autorisée)

Coefficient : 5
Durée : 4 heures

EXERCICE (4 points)

Dans cet exercice, toutes les questions sont indépendantes. Pour les 4 questions, reproduis le tableau ci-dessous et complète-le par la lettre correspondant à la bonne réponse.

Numéro de la question	1	2	3	4
Lettre correspondant à la bonne réponse				

- 1) On lance un dé bien équilibré à 12 faces et numéroté de 1 à 12. On appelle X la variable aléatoire qui au lancer de ce dé associe le numéro affiché sur la face supérieure.

L'espérance de cette variable aléatoire X , notée $E(X)$, est égale à :

- a. $\frac{39}{2}$ b. $\frac{39}{3}$ c. $\frac{39}{4}$ d. $\frac{39}{6}$

- 2) On considère le nombre complexe $Z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ alors un argument, à 2π près, de Z est :

- a. $-\frac{\pi}{12}$ b. $\frac{\pi}{12}$ c. $\frac{5\pi}{12}$ d. $-\frac{5\pi}{12}$

- 3) On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}). \text{Quelle est la position relative des points } M(-t) \text{ et } M(t) ?$$

- a. Confondu b. Symétrique par rapport à l'axe des abscisses
c. Symétrique par rapport à l'axe des ordonnées d. Symétrique par rapport à l'origine du repère

- 4) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points $A(-2; -1; 2)$, $B(6; -5; 3)$ et $C(-1; 3; 10)$. L'aire en cm^2 du triangle ABC est égale à :

- a. $\frac{9}{2}$ b. 81 c. $\frac{81}{2}$ d. 9

PROBLEME (11 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2cm. On désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) \begin{cases} 1 - (x + 1)^2 e^x, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 \ln(x) - x^2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Partie A (7,5pts)

1. a) Étudie la continuité de f en 0. (0,5pt)
b) Étudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète graphiquement le résultat obtenu. (1pt)
2. a) Calcule la limite de f en $+\infty$. (0,25pt)
b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interprète graphiquement le résultat obtenu. (0,5pt)
3. a) Vérifie que pour tout $x \leq 0$, $f(x) = 1 - 4 \left(\frac{1}{2} x e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} \right)^2$. (0,25pt)
b) Calcule la limite de f en $-\infty$ puis interprète graphiquement le résultat obtenu. (0,5pt)
4. a) Montre que la dérivée $f'(x) = \begin{cases} -(x+1)(x+3)e^x, & \text{si } x < 0 \\ x(2\ln x - 1), & \text{si } x > 0 \end{cases}$. (1pt)
b) Étudie le signe de $f'(x)$ et en déduis le sens de variation de f . (1pt)
c) Dresse le tableau de variation de f . (0,5pt)
5. a) Détermine les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses sur $]0; +\infty[$. (0,25pt)
b) Démontre que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse $\alpha > 0$ puis vérifie que $\alpha \in]2,5; 3[$. (0,5pt)
c) Construis la courbe (C_f) . (1,25pts)

Partie B (2pts)

On considère la suite numérique définie pour tout entier naturel $n \geq 3$ par $I_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$;

On suppose que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $f(n+1) - f(n) \geq f'(n)$

1. a) Démontre que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $f(n) \leq I_n$. (0,5pt)
b) Démontre que la suite (I_n) est divergente. (0,5pt)
2. a) Vérifie que la fonction $H: x \mapsto (x^2 + 1)e^x$ est une primitive de la fonction $h: x \mapsto (x+1)^2 e^x$. (0,25pt)
b) Calcule l'aire du domaine du plan limitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$. (0,75pt)

Partie C (1,5pts)

On considère un point mobile M dont les coordonnées en fonction du paramètre t par

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{2t}(t-1) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- 1) Montre que la trajectoire de M est une partie de (C_f) que l'on précisera. (0,5pt)
- 2) Détermine les coordonnées du vecteur vitesse du point M à l'instant $t = \ln 2$. (1pt)

Données : $1 - 4e^{-3} \approx 0,8$; $e^{\frac{1}{2}} \approx 1,65$; $\frac{e}{2} \approx 1,35$; $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 2,5 \approx 0,9$; $\ln 3 \approx 1,1$

SITUATION D'INTEGRATION (5points)

La pollution d'une ville africaine suscite de vives plaintes de la population. Face à cette situation, la mairie impose une nouvelle norme anti-pollution aux industriels, les obligeant à réduire progressivement leurs rejets annuels de déchets, initialement supérieurs ou égaux à 50 000 tonnes en 2020, à moins de 30 000 tonnes dans un délai de 10 ans, sous peine de sanctions financières. Pour modéliser cette dynamique de réduction, qui prend en compte l'inertie du système et les effets d'accélération ou de décélération, on utilise l'équation suivante :

$$y(t) = y(0)e^{-rt} \text{ où :}$$

- $y(t)$ représente la quantité de rejets de déchets (en tonnes) à l'année t (avec $t = 0$ correspondant à l'année 2020),,
- $y(0) = 50\,000$ tonnes et $r = 4\%$.

Les industriels, qui se sont engagés à réduire leurs rejets de 4 % par an, sollicitent ton expertise en tant qu'élève de Terminale D pour les aider à évaluer leur conformité à la nouvelle norme dans le délai imparti.

À travers une production détaillée, réponds aux consignes suivantes :

- 1) Calcule la quantité de déchets après 10 ans. **(1,5pt)**
- 2) Si cette quantité est supérieure à 30 000 tonnes, détermine le taux de réduction r minimal nécessaire pour que la quantité de déchets soit inférieure ou égale à 30 000 tonnes après 10 ans. **(1,5pt)**
- 3) En supposant que le taux de réduction reste constant à 4%, calcule le nombre d'années nécessaire pour que les rejets passent sous la barre des 25 000 tonnes. **(1,5pt)**

Présentation : **0,5pt**

Données : $\ln 3 \approx 1,1$; $\ln 5 \approx 1,6$; $\ln 2 \approx 0,7$; $e^{-0,4} \approx 0,7$.