

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Coefficient : 5
Durée : 4 heures

EXERCICE N°1 (4 points)

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = 2^{-2n+1}$.

1. a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. (1 pt)
b) Calculer la limite de la suite (U_n) . (0,5 pt)
2. On considère la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $V_n = \frac{\ln(U_n)}{\ln 2}$. Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison. (0,5 pt)
3. On note S_n la somme $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$ et P_n le produit $P_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times \dots \times U_{n-1}$.
 - a) Exprimer S_n en fonction de n . En déduire l'expression de P_n en fonction de n (on pourra remarquer que $U_n = 2^{V_n}$) (1 pt)
 - b) Résoudre dans \mathbb{N} , l'équation $S_n = -24$ et l'inéquation $S_n > -24$. (1 pt)

EXERCICE N°2 (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(0; -\frac{1}{2}; 0)$;

$B(\frac{1}{2}; 0; 0)$ et $C(0; \frac{1}{2}; 0)$.

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. (0,5 pt)
2. a) Comparer les distances AB et AD . (0,5 pt)
b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$. (0,5 pt)
En déduire que $ABCD$ est un carré puis calculer son aire. (0,5 pt)
3. On considère le point $S(0; 0; 2)$.
 - a) Calculer la distance du point S au plan (ABC) . (1,5 pt)
 - b) En déduire le volume V de la pyramide $SABCD$. (0,5 pt)
[On rappelle que le volume d'une pyramide est le tiers de sa surface de base multiplié par sa hauteur]

PROBLEME (12 points)

Partie A (2,5 points)

On considère la fonction g définie sur $] -1; +\infty[$ par $g(x) = x(x + 1) + \ln(x + 1)$.

- a) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe. (1 pt)
b) En déduire le sens de variation de g . (0,25 pt)
- Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour $x > -1$. (1,25 pt)

Partie B (7,5 points)

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + \ln^2(x + 1)$.

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

- a) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (1 pt)
b) Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > -1$ puis vérifier que $f'(x) = 2 \cdot \frac{g(x)}{x+1}$. (1 pt)
c) En déduire, à l'aide de la partie A, les variations de f et dresser son tableau de variation. (1 pt)
- Montrer que la restriction h de f à $] -1; 0]$ est une bijection de $] -1; 0]$ sur un intervalle J à préciser. (1 pt)
On désigne par h^{-1} la réciproque de h et par (Γ) sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(0; \vec{i}, \vec{j})$.
- Soit u la fonction définie sur $] -1; 0]$ par $u(x) = h(x) - x$.
 - Etudier les variations de u puis dresser son tableau de variation. (1 pt)
 - En déduire qu'il existe un unique réel α de $] -1; 0]$ tel que $h(\alpha) = \alpha + 1$. (0,5 pt)
- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat. (1 pt)
b) Tracer dans le même repère orthonormal $(0; \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (\mathcal{C}) et (Γ) . (1 pt)

Partie C (2 points)

On désigne par \mathcal{A} l'aire de la partie limitée par (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.

- Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x + (x + 1)[\ln^2(x + 1) - 2 \ln(x + 1)]$ est une primitive sur $] -1; +\infty[$ de la fonction f . (1,5 pt)
- Calculer alors l'aire \mathcal{A} . (0,5 pt)