EXAMEN DU BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE

SESSION DE REMPLACEMENT 2025

SERIES : F1- F3- F4

BURKINA FASO

La Patrie ou la Mort, nous Vaincrons

2nd tour

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Coefficient : 5
Durée : 4 heures

EXERCICE N°1 (4 points)

I. Soit $P(Z) = Z^3 - 2(\sqrt{3} + i)Z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})Z - 8i$

1. Montrer que P admet une racine imaginaire pure Z_0 que l'on précisera. (0,25 pt)
2. Trouver les réels a et b tels que $P(Z) = (Z - Z_0)(Z^2 + aZ + b)$. (0,5 pt)
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(Z) = 0$. (0,25 pt)
4. Ecrire les solutions sous forme trigonométrique. (0,75 pt)

II. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2cm.

1. Placer les points J, I, E d'affixes respectives $Z_J = 2i$; $Z_I = \sqrt{3} - i$ et $Z_E = \sqrt{3} + i$ dans le repère. (0,5 pt)
2. Montrer que les points J, I, E appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. (0,75 pt)
3. Calculer $Z_E - Z_I$ et $Z_E - Z_J$ puis donner la nature exacte du quadrilatère $JOIE$. (1 pt)

Donnée : $\sqrt{3} = 1,7$

EXERCICE N°2 (4 points)

Une personne loue une maison à partir du 1er janvier 2020. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial est de 24000F et le locataire s'engage à occuper la maison pendant 10 années complètes.

1. Contrat n°1
   Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5% du loyer de l'année précédente.
   On désigne par U_n le loyer à la n-ième année.
   a) Calculer le loyer U_2 payé lors de la deuxième année. (0,5 pt)
   b) Exprimer U_n en fonction de n. (0,5 pt)
   Calculer U_{10} . (0,25 pt)
   c) Calculer la somme payée (S) à l'issue des dix années de contrat. (0,5 pt)
2. Contrat n°2
   Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire du loyer de l'année précédente d'une valeur de 1500F.
   On désigne par V_n le loyer à la n-ième année.
   a) Calculer le loyer V_2 payé lors de la deuxième année. (0,5 pt)
   b) Exprimer V_n en fonction de n. (0,5 pt)
   Calculer V_{10} . (0,25 pt)

c) Calculer la somme payée (S') à l'issue des dix années de contrat. (0,5 pt)

3. Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire ? (0,5 pt)

Données : $(1{,}05)^9 = 1{,}55$ et $(1{,}05)^{10} = 1{,}63$

PROBLEME (12 points)

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2cm.

1. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$. (0,5 pt)
   b) En déduire que la droite (D): $y = x + 1$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$. (0,5 pt)
   c) Préciser la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (D). (0,5 pt)
   d) Calculer la limite de f en $-\infty$. (0,5 pt)
2. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1}$. (0,5 pt)
   b) En déduire que la droite (Δ): $y = x - 1$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$. (0,5 pt)
   c) Préciser la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ). (0,5 pt)
   d) Calculer la limite de f en $+\infty$. (0,5 pt)
3. a) Montrer que f est une fonction impaire. (0,5 pt)
   b) Quelle conséquence graphique peut-on déduire pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (0,5 pt)
4. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations. (2 pts)
5. Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse O. (0,5 pt)
6. Construire $(\mathcal{C}_f)$; (D); (Δ) et (T). (1,5 pt)
7. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.(0,5 pt)
8. a) Déterminer une primitive de $x \longmapsto x + 1$. (0,5 pt)
   b) Déterminer une primitive de $x \longmapsto \frac{e^x}{e^x+1}$. (0,5 pt)
   c) En déduire une primitive F de f. (0,5 pt)
9. Soit ε le domaine du plan limité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite (Δ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\varepsilon)$. (1 pt)

Données : $\ln(e^2 + 1) = 2{,}1$; $\ln 2 = 0{,}7$